BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7 ou 9

- *Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité.*
- *La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (5 points)

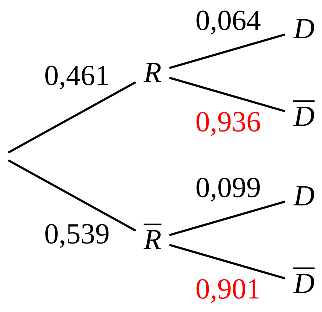
Les trois parties sont indépendantes.

Partie 1 *Les résultats des probabilités seront arrondis à* 10^{-3} *près.*

1) $p(R) = 0461,\ p(\overline{R}) = 0,539,$

$p_{\overline{R}}(D) = 0,099,\ p_R(D) = 0,064.$

On obtient l'arbre suivant :

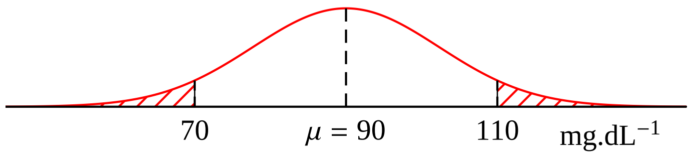


2) a) $p(D) = p(R \cap D) + p(\overline{R} \cap D) = p(R) \times p_R(D) + p(\overline{R}) \times p_{\overline{R}}(D)$
$= 0,461 \times 0,064 + 0,539 \times 0,099 \approx 0,083.$

b) $p_D(R) = \dfrac{p(R \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,461 \times 0,064}{0,083} \approx 0,355$

Partie 2 *Les résultats des probabilités seront arrondis à* 10^{-3} *près.*

1) $p(X > 110) = 0,052,$
du fait de la symétrie, par rapport à 90, de la loi normale, $p(X < 70) = p(X > 110) = 0,052$



$$p(70 \leqslant X \leqslant 110) = p(X \leqslant 110) - p(X < 70) = 1 - p(X > 110) - p(X < 70)$$
$$= 1 - 2p(X > 110) = 1 - 2 \times 0,052 = 0,896$$

2) On revient à la loi normal centrée réduite en posant : $Z = \dfrac{X - 90}{\sigma}$

$$p(X < 70) = 0,052 \quad \Leftrightarrow \quad \left(Z < \frac{70-90}{\sigma}\right) = 0,052 \quad \Leftrightarrow \quad p\left(Z < -\frac{20}{\sigma}\right) = 0,052$$

$$\Phi\left(-\frac{20}{\sigma}\right) = 0,052 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{20}{\sigma} = \Phi^{-1}(0,052) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = -\frac{20}{\Phi^{-1}(0,052)} \approx 12,3$$

3) $p(X < 60) = \text{NormalFRép}(-10^{99}, 60, 90, 12) \approx 0,006$

Partie 3 *Les résultats des probabilités seront arrondis à* 10^{-4} *près.*

1) $\text{E}(T) = 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\lambda} = 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 10^{-4} = 0{,}000\,1$

2) $P(T \geqslant 5\,000) = e^{-5\,000\lambda} = e^{-5\,000 \times 10^{-4}} = e^{-0,5} \approx 0,6065.$

3) $p_{T \geqslant 7\,000}(T \geqslant 12\,000) = p(T \geqslant 12\,000 - 7\,000) = p(T \geqslant 5\,000) \approx 0,6065$

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A : Modélisation discrète

1) On trouve comme valeurs :
   - 3 minutes : $T \approx 54^\circ$C
   - 5 minutes : $T \approx 67^\circ$C

2) Soit la proposition : $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

   Montrons cette proposition par récurrence :

   Initialisation : $n = 0$, $100 - 75 \times 0,85^0 = 100 - 75 = 25 = T_0$. La proposition est initialisée.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$,
   on suppose que $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$, montrons que $T_{n+1} = 100 - 75 \times 0,85^{n+1}$.

   D'après l'algorithme, on a : $T_{n+1} = 0,85T_n + 15$

   D'après l'hypothèse de récurrence : $T_{n+1} = 0,85(100 - 75 \times 0,85^n) + 15$.

   On a donc $T_{n+1} = 85 - 75 \times 0,85^{n+1} + 15 = 100 - 75 \times 0,85^{n+1}$

   La proposition est héréditaire.

   Conclusion : par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

3) La stérilisation débute si $T_n > 85$

   $100 - 75 \times 0,85^n > 85 \quad\Leftrightarrow\quad -75 \times 0,85^n > -15 \quad\Leftrightarrow\quad 0,85^n < \dfrac{15}{75}\left(= \dfrac{1}{5}\right) \quad\Leftrightarrow$

   La fonction ln étant monotone sur $]0\,;+\infty[$,

   $n \ln 0,85 < -\ln 5 \quad\Leftrightarrow\quad n > -\dfrac{\ln 5}{\ln 0,85} \quad\Leftrightarrow\quad n > 9,9$

   La stérilisation débute au bout de 10 minutes.

Partie B : Modélisation continue

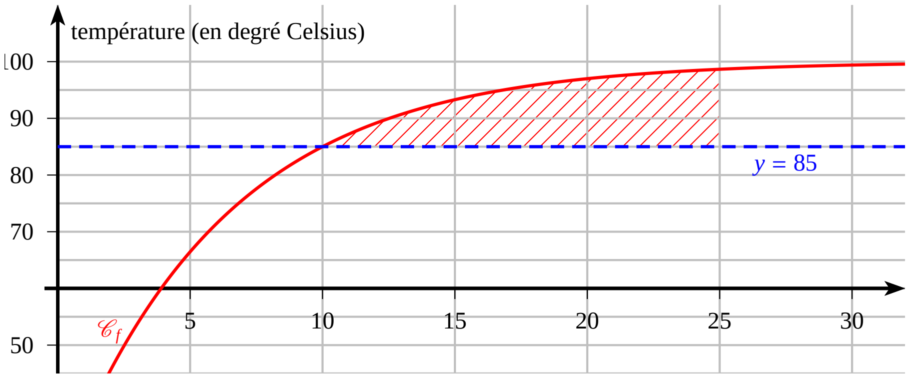
1) a) On dérive : $f'(x) = \dfrac{75 \ln 5}{10} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}$ or $\dfrac{75 \ln 5}{10} > 0$ et $\forall t \in [0\,;+\infty[$, $e^{-\frac{\ln 5}{10}t} > 0$.

   $\forall t \in [0\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$, la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

   b) $t \geqslant 10 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(t) \geqslant f(10) \quad\Leftrightarrow\quad f(t) \geqslant 100 - 75\,e^{-\frac{10\ln 5}{10}} \quad\Leftrightarrow\quad f(t) \geqslant 100 - 75\,e^{-\ln 5} \overset{e^{-\ln 5}=\frac{1}{5}}{\Leftrightarrow}$

   $f(t) \geqslant 100 - \dfrac{75}{5} \quad\Leftrightarrow\quad f(t) \geqslant 85$

2) a) On doit minorer l'aire délimitée par $\mathscr{C}$, la droite $y = 85$ et les droites $x = 10$ et $x = 25$



L'aire $\mathscr{A}(25)$ est minorée par 3,5 rectangles dont l'aire est $5 \times 5 = 25$ u.a.
$\mathscr{A}(25)$ est donc minorée par $3,5 \times 25 = 87,5 > 80$.

b) $g(t) = f(t) - 85 = 15 + 75\, e^{-\frac{\ln 5}{10}t} = 15 - 75\left(-\dfrac{10}{\ln 5}\right) \times \left(-\dfrac{\ln 5}{10}\, e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right)$.

or $\int u' e^u = e^u$ donc $G(t) = 15t + \dfrac{750}{\ln 5}\, e^{-\frac{\ln 5}{10}t}$

c) $\mathscr{A}(20) = \displaystyle\int_{10}^{20} g(t)\,\mathrm{d}t = \big[G(t)\big]_{10}^{20} = 15(20-10) + \frac{750}{\ln 5}\left(e^{-2\ln 5} - e^{-\ln 5}\right) = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{5}\right)$

$= 150 - \dfrac{3000}{25\ln 5} \approx 75,44 < 80$.

La stérilisation n'est donc pas finie au bout de 20 minutes.

Exercice 3 (5 points)

1) $|a| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ et $\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$ $\theta = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, $a = 2\sqrt{3}\, e^{-\frac{\pi}{3}}$.

2) a) $z_1 = 1 - \dfrac{1}{z_0} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

$z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - 2 = -1$

$z_3 = 1 - \dfrac{1}{z_2} = 1 + 1 = 2 = z_0$

On déduit alors $z_4 = z_1 = \dfrac{1}{2}$, $z_5 = z_2 = -1$ et $z_6 = z_3 = z_0 = 2$.

b) $z_1 = 1 - \dfrac{1}{z_0} = 1 - \dfrac{1}{i} = 1 + i$.

$z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - \dfrac{1}{1+i} = 1 - \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1+i}{2}$

$z_3 = 1 - \dfrac{1}{z_2} = 1 - \dfrac{2}{1+i} = 1 - \dfrac{2(1-i)}{2} = 1 - (1-i) = i = z_0$

On déduit alors $z_4 = z_1 = 1 + i$, $z_5 = z_2 = \dfrac{1+i}{2}$ et $z_6 = z_3 = z_0 = i$.

c) On peut conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{3n} = z_0$.

Prouvons cette conjecture par récurrence.

Initialisation : : $n = 0$, immédiat $z_0 = z_0$. la proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $z_{3n} = z_0$, montrons que $z_{3(n+1)} = z_{3n+3} = z_0$.

$z_{3n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_{3n}} \overset{\text{HR}}{=} 1 - \dfrac{1}{z_0} = \dfrac{z_0 - 1}{z_0}$

$z_{3n+2} = 1 - \dfrac{1}{z_{3n+1}} = 1 - \dfrac{z_0}{z_0 - 1} = \dfrac{z_0 - 1 - z_0}{z_0 - 1} = -\dfrac{1}{z_0 - 1}$.

$z_{3n+3} = 1 - \dfrac{1}{z_{3n+2}} = 1 + (z_0 - 1) = z_0$.

La proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{3n} = z_0$.

d) $2016 = 3 \times 672$, donc $z_{2016} = z_{3\times 672} = z_0 = 1 + i$.

e) $z_0 = z_1 \Leftrightarrow z_0 = 1 - \dfrac{1}{z_0} \overset{\times z_0}{\Leftrightarrow} z_0^2 = z_0 - 1 \Leftrightarrow z_0^2 - z_0 + 1 = 0$.

$\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$, on a $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées :

$$z_0' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_0'' = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

La suite (z_n) est alors constante.

Exercice 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1) a) Limite en 0^+. De $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} 2 + 2\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}.$$

Limite en $+\infty$: $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{\ln x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, par produit et somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2}{x} \times x - (2 + 2\ln x)}{x^2} = \dfrac{2 - 2 - 2\ln x}{x^2} = \dfrac{-2\ln x}{x^2}$.

Comme $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $x^2 > 0$, alors $f'(x)$ est du signe de $-\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0

2) Sur l'intervalle $]0\,;\,1]$:
- f est continue car dérivable ;
- f est monotone (f est croissante)
- 1 est compris entre $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 2$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,1]$.

On trouve $f(0,4) \approx 0,41$ donc $0,4 < \alpha < 1$. on rentre la fonction $g(x) = f(x) - 1$

Par l'algorithme de dichotomie, on trouve $0,463 < \alpha < 0,464$ après 10 itérations.

3) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = \dfrac{2}{x} + 2 \times u'(x)u(x)$ avec $u(x) = \ln x$.

De $\displaystyle\int u'u = \frac{u^2}{2}$, $F(x) = 2\ln x + \ln^2 x = \ln x(2 + \ln x)$.

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{\frac{1}{e}}^{1} = 2\ln 1 + \ln^2 1 - \left(2\ln\frac{1}{e} + \ln^2\frac{1}{e}\right) = 0 - (-2\ln e + (-\ln e)^2) = 2 - 1 = 1$$

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) $u_2 - u_1 = 0,9\,(u_1 - u_0) = 0,9(5,1 - 5) = 0,09 \quad \Rightarrow \quad u_2 = u_1 + 0,09 = 5,1 + 0,09 = 5,19.$

2) a) $u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9\,(u_{n+1} - u_n) \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+2} = 1,9u_{n+1} - 0,9u_n.$

$$\mathbf{AV}_n = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9u_{n+1} - 0,9u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{V}_{n+1}.$$

b) $\det(\mathbf{P}) = \begin{vmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,9 - 1 = -0,1.$ Comme $\det(\mathbf{P}) \neq 0$, la matrice $\mathbf{P}$ est inversible.

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{P})}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0,9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{0,1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}.$$

c)
$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} &= \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -19+10 & 9+0 \\ 19-9 & -9+0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8,1+9 & -9+9 \\ 9-9 & 10-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{D}\end{aligned}$$

d) $\mathbf{PDP}^{-1} = \mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})\mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{PP}^{-1})\mathbf{A}(\mathbf{PP}^{1}) = \mathbf{A} \quad (1).$

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}.$

Initialisation : : $\mathbf{PD}^0\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PIP}^{-1} = \mathbf{PP}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^0.$
La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$, montrons que $\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{PD}^{n+1}\mathbf{P}^{-1}.$

$\mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$, on multiplie à gauche par $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{AA}^n = \mathbf{A} \times \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1} \overset{(1)}{=} (\mathbf{PDP}^{-1})(\mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1})$$
$$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{PD}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P})\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PDID}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PDD}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PD}^{n+1}\mathbf{P}^{-1}$$
La proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}.$

e) $$\mathbf{V}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5,1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On calcule le 2e coefficient de $\mathbf{V}_n$:
$u_n = 5,1(-10 \times 0,9^n + 10) + 5(10 \times 0,9^n - 9) = -51 \times 0,9^n + 51 + 50 \times 0,9^n - 45 = 6 - 0,9^n$

3) $u_{10} = 6 - 0,9^{10} \approx 5,651.$
La taille de la colonie au bout du 10e jour est de 5 651 fourmis.

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ car $-1 < 0,9 < 1$, par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6.$

La colonie de fourmis tendra vers 6 000 fourmis à partir d'un certain nombre de jours.