BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soient A le point d'affixe $2-5i$ et B le point d'affixe $7-3i$.
   Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.
2) Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-i| = |z+2i|$.
   Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.
3) Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4) Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i+z| = 1 + |z|$.
5) Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

1) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
2) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
3) En déduire que si $x \geqslant e$ alors $f(x) \geqslant e$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.
   Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant e$.
   b) Déterminer les variations de la suite (u_n).
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   d) Déterminer sa limite ℓ.

3) On donne l'algorithme ci-contre.

Variables
X variable réelle, Y variable entière
Initialisation
$5 \to X, \quad 0 \to Y$
Traitement
Tant que $X > 2,72$
$\dfrac{X}{\ln X} \to X, \qquad Y+1 \to Y$
FinTantque
Sortie
Afficher Y

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	3,106 674 672 8	2,740 652 532 3	2,718 372 634 6	2,718 281 830 01	2,718 281 828 5

EXERCICE 3 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à $0,12$.
Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}

Partie A

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin.
On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

1) Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?
2) Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation ?

Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ, est un réel strictement positif.

Dans les questions 1, 2, 3, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1) Exprimer $P(\mathrm{Y} \leqslant 1)$ en fonction de λ. En déduire la valeur de λ.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,128$.
2) Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?
3) Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?
4) On rappelle que la durée moyenne d_m de ces moteurs est égale à l'espérance mathématique de la variable Y
   Déterminer la valeur de d_m. On arrondira à 10^{-1}.

Partie C

Un autre magasin voudrait vérifier que cette valeur de $p = 0,12$ est vraisemblable. Sur les 500 moteurs qu'il a vendu pendant 1 an, il a eu un retour de 50 moteurs pour cause de panne. On appelle F la variable aléatoire qui, à un échantillon de 500 moteurs, associe la proportion des moteurs qui tombent en panne la première année.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable F.
2) Ce magasin doit-il remettre en cause la valeur de p ?

EXERCICE 4 (4 points)

Partie A

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. La hauteur est en mètres et le temps en jours.
On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.
On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1$ m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.
Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie B

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0 ; 250]$ par

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

1) Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f). En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 250]$.
2) Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5$ m.
3) a) Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; 250]$ on a $f(t) = \dfrac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t} + 19}$.
   Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 250]$ par
   $F(t) = 50 \ln\left(\mathrm{e}^{0,04t} + 19\right)$ est une primitive de la fonction f.
   b) Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50 ; 100]$.
   En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

Nom :

Prénom :

Annexe de l'exercice 2

(À rendre avec la copie)