BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7 ou 9

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1) $u_1 = 0,9 \times 0,3(1-0,3) = 0,189$ et $u_2 = 0,9 \times 0,189(1-0,189) \approx 0,138$
Les nombres de tortues en 2001 et 2002 sont respectivement 189 et 138.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1 \overset{\times 0,9u_n > 0}{\Rightarrow} 0 \leqslant 0,9u_n(1-u_n) \leqslant 0,9u_n \Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$

b) Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.
Initialisation : $n = 0$, $u_0 = 0,3$ et $0,3 \times 0,9^0 = 0,3$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 0,3$.
La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$,
on suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$, montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,3 \times 0,9^{n+1}$:
D'après la question 2a),
$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n \overset{\text{HR}}{\Rightarrow} 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9 \times 0,3 \times 0,9^n \Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,3 \times 0,9^{n+1}$
La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ car $-1 < 0,9 < 1$. par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3 \times 0,9^n = 0$.
D'après le théorème de gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Les tortues, d'après ce modèle, sont donc en voie d'extinction.

3) ⚠ Prendre le dernier indice qui convienne, soit dans le programme $N - 1$.

Variables : N : entier naturel U : réel
Entrées et initialisation
  U prend la valeur $0,3$
  N prend la valeur 0
Traitement
  tant que $U \geqslant 0,03$ **faire**
    $N + 1 \to N$
    $0,9U(1-U) \to U$
  fin
Sorties : Afficher $N - 1$

On trouve alors que 2010 est la dernière année où l'on compte au moins 30 tortues.

Partie B

1) $v_{11} = 1,06 \times 0,032(1-0,032) \approx 0,33$ et $v_{12} = 1,06 \times 0,033(1-0,033) \approx 0,034$.
Les nombres de tortues en 2011 et 2012 sont respectivement 33 et 34.

2) La fonction associée f à cette suite est définie par : $f(x) = 1,06x(1-x)$.
f est continue sur $\mathbb{R}_+$, et comme la suite (u_n), définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente vers ℓ, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = 1,06\ell(1-\ell)$.

3) La suite (u_n) est croissante, donc $\ell > 0$, on a alors :
$$\ell = 1,06\ell(1-\ell) \overset{\div \ell}{\Leftrightarrow} 1,06(1-\ell) = 1 \Leftrightarrow \ell = 1 - \frac{1}{1,06} \approx 0,057.$$

La population de tortue tend donc vers 57. La population de tortues n'est donc pas en voie d'extinction car supérieure à 50.

EXERCICE 2 **(5 points)**

1) a) $\varphi(1) = 1^2 - 1 + 3\ln 1 = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} 3\ln x = -\infty$, par somme $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$.

b) $\varphi'(x) = 2x + \dfrac{3}{x}$. On a donc $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ 2x + \dfrac{3}{x} > 0 \iff \varphi'(x) > 0$.
La fonction φ est croissante sur $]0\,;+\infty[$. Comme $\varphi(1) = 0$, on en déduit :

$\forall x \in]0,1[,\ \varphi(x) < 0$ et $\forall x \in]1\,;+\infty[,\ \varphi(x) > 0$.

2) a) Limite en 0^+

$$\lim_{x\to 0^+} x - 2 = 0, \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} -(2+3\ln x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-(2+3\ln x)}{x} = +\infty\end{array}$$

Par somme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

Limite en $+\infty$, on change la forme de f en $f(x) = x - 2 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{3\ln x}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x - 2 - \dfrac{2}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par produit et somme} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

b) $$f'(x) = 1 - \frac{\dfrac{3}{x} \times x - (2 + 3\ln x)}{x^2} = \frac{x^2 - 3 + 2 + 3\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + 3\ln x}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}.$$

c) Le signe de f' est le signe de φ. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

d) Sur $I =]0\,;\ 1]$ et sur $J = [1\,;+\infty[$.

- La fonction f est continue sur I et sur J car dérivable sur I et J.
- La fonction f est monotone : décroissante sur I et croissante sur J.
- La fonction f change de signe sur I et J car :
  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $f(1) = -3$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} = +\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur I et une unique solution β sur J.

Si l'on veut utiliser l'algorithme de dichotomie, on peut prendre les intervalles fermés suivant : $[0,3\,;\ 1]$ et $[1\,;\ 5]$ car $f(0,3) \approx -3,67$ et $f(5) \approx 1,63$.

On trouve alors l'encadrement à 10^{-3} : $0,412 \leqslant \alpha \leqslant 0,413$ et $3,618 \leqslant \beta \leqslant 3,619$.
Les valeurs approchées à 10^{-2} sont donc $\alpha \approx 0,41$ et $\beta \approx 3,62$

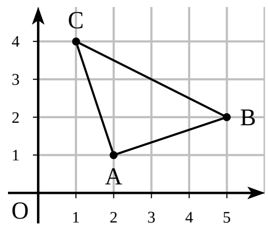
e) On dérive la fonction proposée : $F'(x) = x - 2 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x}\ln x = f(x)$.
La fonction F est donc bien une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

EXERCICE 3 (5 points)

1) **Proposition 1 : vrai**
On calcule $\Delta = 4a^2 - 4(x^2+1) = 4a^2 - 4a^2 - 4 = -4$.
Comme $\Delta < 0$, les solutions z_1 et z_2 de (E) ne sont par réelles et sont complexes conjuguées.
$|z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1|$. Les solutions ont donc même module.

2) **Proposition 2 : vrai** Le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1+4i-2-i}{5+2i-2-i} = \frac{-1+3i}{3+i} = \frac{i^2+3i}{3+i} = \frac{i(3+i)}{3+i} = i$$



$$\frac{AC}{AB} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |i| = 1 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

3) **Proposition 3 : faux**
Comme contre-exemple, on peut prendre $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

$$z = 1 + e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ on trouve $\arg z = \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\theta}{2}$.

Remarque, on peut montrer que pour tout $\theta \in]0;\pi[$ qu'un argument de z est $\dfrac{\theta}{2}$. En effet

$$1 + e^{i\theta} = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

4) **Proposition 4 : faux**

$$|z| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \theta = \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi].$$

5) **Proposition 5 : vrai**
$z = 1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $\arg(z^n) = n\arg z = \dfrac{n\pi}{4}$ $[2\pi]$.

z^n est un imaginaire pur si, et seulement si, $\arg(z^n) = \dfrac{\pi}{2}$ $[\pi]$.

On a alors $\dfrac{n\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \overset{\times\frac{4}{\pi}}{\Leftrightarrow} n = 2 + 4k \Leftrightarrow n - 2 = 4k \quad k \in \mathbb{Z}$

$(n-2)$ est alors un multiple de 4.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A - Cas général

1) On dérive par rapport à t : on rappelle que $(e^u)' = u'e^u$.

$v'(t) = \dfrac{mg}{k}\left[0 - \left(-\dfrac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right] = g\,e^{-\frac{k}{m}t}$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad e^{-\frac{k}{m}t} > 0$ donc $v'(t) > 0$.

La vitesse v est croissante sur $\mathbb{R}_+$. (L'accélération est positive)

2) Comme la vitesse est croissante, la goutte d'eau ne ralentit pas au cours de sa chute.

3) $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{k}{m}t = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^t = 0 \end{array}\right\}$ Par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = 0$ Par somme et produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} v(t) = \frac{mg}{k}$.

4) On calcule $v\left(\dfrac{5m}{k}\right) = \dfrac{mg}{k}\left(1 - e^{-5}\right) \approx 0,993 \times \dfrac{mg}{k} \approx 0,993\, v_{\text{lim}}$.

Le scientifique a raison car la vitesse à $t = \dfrac{5m}{k}$ se trouve à 99,3 % de sa vitese limite.

Partie B

Avec les données fournies, on a $v(t) = 15\left(1 - e^{-\frac{2}{3}t}\right)$.

1) Il faut résoudre l'équation suivante : $v(t) = 14,85$

$v(T) = 14,85 \quad\Leftrightarrow\quad 15\left(1 - e^{-\frac{2}{3}T}\right) = 14,85 \quad\Leftrightarrow\quad 1 - e^{-\frac{2}{3}T} = \dfrac{14,85}{15} \quad\Leftrightarrow\quad e^{-\frac{2}{3}T} = 1 - \dfrac{14,85}{15}$

$\Leftrightarrow\quad e^{-\frac{2}{3}T} = 0,01$

On compose avec la fonction ln : $-\dfrac{2}{3}T = \ln 0,01 \quad\Leftrightarrow\quad T = -\dfrac{3}{2}\ln 0,01 \approx 6,9$.

La goutte d'eau s'est détachée du nuage depuis 6,9 s.

2) Il faut trouver une primitive de v. Appelons x (équation horaire) cette primitive. $\int u'e^u = e^u$

$$v(t) = 15\left[1 + \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}t}\right)\right] \quad\Rightarrow\quad x(t) = 15\left(t + \frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}t}\right)$$

$$v_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{15}{T}\left[t + \frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}t}\right]_0^T = \frac{15}{T}\left(T + \frac{3}{2}e^{-\frac{2T}{3}} - 0 - \frac{3}{2}\right)$$

$$v_{\text{moy}} \approx \frac{15}{6,9}\left(6,9 + 1,5e^{-4,6} - 1.5\right) \approx 11,77$$

La vitesse moyenne est de 11,8 m.s^{-1} au dixième près.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1) O et E étant les deux premières lettres apparaissant le plus dans le message codé, on en déduit que E se code en O et A se code en E.

2) E(4) se code en O(14) donc $4a+b \equiv 14 \ [26]$ et A(0) se code en E(4) donc $0a+b \equiv 4 \ [26]$.

   On obtient bien le système : $\begin{cases} 4a+b \equiv 14 \ [26] \ (1) \\ b \equiv 4 \ [26] \ (2) \end{cases}$.

3) En gardant (2) et en faisant (1) − (2), on trouve : $\begin{cases} b \equiv 4 \ [26] \\ 4a \equiv 10 \ [26] \end{cases}$

   - Comme $0 \leqslant b \leqslant 25$, on en déduit que $b = 4$
   - ⚠ ne pas diviser la deuxième équation !

     $4a \equiv 10 \ [26] \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z},\ 4a = 10 + 26k \quad \Leftrightarrow \quad 2a = 5 + 13k$

     Comme $2a$ est pair, $(5+13k)$ est pair donc k doit être impair. De plus :
     $0 \leqslant a \leqslant 25 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2a \leqslant 50 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 5+13k \leqslant 50 \quad -5 \leqslant 13k \leqslant 45 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant k \leqslant 3$

     Donc : $k = 1$ ou $k = 3$ qui donnent respectivement $a = 9$ ou $a = 22$.

   Les couples possibles sont donc (9,4) et (22,4).

Partie B

1) La fonction affine f associée à ce codage est définie par : $f(x) = 22x + 4$

   a)
   - $\text{K} \to 10 \xrightarrow{f} 224 \xrightarrow{\equiv [26]} 16 \to \text{Q}$
   - $\text{X} \to 23 \xrightarrow{f} 510 \xrightarrow{\equiv [26]} 16 \to \text{Q}$

   b) K et X se code par la même lettre Q donc se codage n'est pas envisageable.

2) On choisit $a = 9$ et $b = 4$.

   a) Par double implication
   - $m \equiv 9n + 4 \ [26] \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3m \equiv 27n + 12 \ [26] \overset{27\equiv 1}{\Rightarrow} 3m \equiv n + 12 \ [26] \Rightarrow$

     $n \equiv 3m - 12 \ [26] \overset{-12\equiv +14}{\Rightarrow} n \equiv 3m + 14 \ [26]$.

   Réciproquement
   - $n \equiv 3m + 14 \ [26] \overset{\times 9}{\Rightarrow} 9n \equiv 27m + 126 \ [26] \overset{27\equiv 1}{\Rightarrow} 9n \equiv m + 126 \ [26] \Rightarrow$

     $m \equiv 9n - 126 \ [26] \overset{-126\equiv +4}{\Rightarrow} m \equiv 9m + 4 \ [26]$.

   Le fonction de décodage f^{-1} est alors : $f^{-1}(x) = 3x + 14$

   b) Décoder le mot NBELA.
   - $\text{N} \to 13 \xrightarrow{f^{-1}} 53 \xrightarrow{\equiv [26]} 1 \to \text{B}$
   - $\text{B} \to 1 \xrightarrow{f^{-1}} 17 \xrightarrow{\equiv [26]} 17 \to \text{R}$
   - $\text{E} \to 4 \xrightarrow{f^{-1}} 26 \xrightarrow{\equiv [26]} 0 \to \text{A}$
   - $\text{L} \to 11 \xrightarrow{f^{-1}} 47 \xrightarrow{\equiv [26]} 21 \to \text{V}$
   - $\text{A} \to 0 \xrightarrow{f^{-1}} 14 \xrightarrow{\equiv [26]} 14 \to \text{O}$

   NBELA se décode en BRAVO !