BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (5 points)

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1) On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a) Déterminer la forme exponentielle de a.
   b) Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.
2) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.
3) Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   a) Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel.
   b) Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.
4) Soit un point M d'affixe z.
   a) Montrer que $f(z)$ est réel si, et seulement si $(z - \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$
   b) Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1) Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3) En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2) a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}$.
   En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées puis étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2-\ln x}{x}$.

Que peut-on dire de la courbe $\mathscr{C}'$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}$?

Exercice 3 (5 points)

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $v_1(t) = 5 \times \dfrac{e^{0,3t}-1}{e^{0,3t}+1}$.

1) Déterminer le sens de variation de la fonction v_1.
2) On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement. On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en m.s^{-1}) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.

   On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s^{-1}.

   Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.
On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en m.s^{-1}), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$v_2(t) = 32,7\left(1 - e^{-0,3t}\right).$$

1) Quelle est la vitesse, exprimée en m.s^{-1}, atteinte par le colis au bout de 10 secondes ? Arrondir à 0,1 m.s^{-1}.
2) Résoudre l'équation $v_2(t) = 30$ m.s^{-1}. Donner une interprétation concrète de la solution de cette équation dans le cadre de cet exercice.
3) On sait que la chute du colis dure 20 secondes.

   On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$d(T) = \int_0^T v_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

   a) Montrer que, pour tout réel T de l'intervalle $[0\,;\,20]$, $d(T) = 109\left(\mathrm{e}^{-0,3T} + 0,3T - 1\right)$.
   b) Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol.
4) Déterminer un encadrement d'amplitude 0,1 s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.

   On pourra étudier les variations de la fonction $T \mapsto d(T) - 700$ dans l'intervalle $[0\,;\,30]$

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.
Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en **dizaines de milliers**.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,8u_n + c.$$

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1) Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n).
   On pourra recopier et remplir le tableau suivant à l'aide de la calculatrice

n	1	2	5	10	50
u_n					

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.
3) Vérifier les deux conjectures établies à la question 1) en justifiant votre réponse.
   Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.
On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, : $v_n = u_n - 5c$.

1) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2) En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n.
3) Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.