# BACCALAURÉAT BLANC

# DE MATHÉMATIQUES

# – SÉRIE S –

**Durée de l'épreuve : 4 HEURES**
**Les calculatrices sont AUTORISÉES**

**OBLIGATOIRE ET SPÉ**



*Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

| |
|---|
| *Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :* |
| ► *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.* |
| ► ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.* |

**TOURNEZ LA PAGE S.V.P.**

## EXERCICE 1 (3 points)

### Partie A : Restitution organisée de connaissance

- On pose : $t = \ln x$ donc $x = e^t$ et $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln e^t}{e^t} = \dfrac{t}{e^t}$
- si $x \to +\infty$, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ alors $t \to +\infty$
- comme $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$ alors $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{e^t} = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{e^t} = 0$

### Partie B

1) Si $x \geqslant 1$ on a : $x^2 - 1 \geqslant 0$ et $\ln x \geqslant 0$. On a donc $g(x) \geqslant 0$

2) a) $f$ est dérivable sur $[1;+\infty[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables sur $[1;+\infty[$.

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) Comme $\forall x \in [1;+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$ alors $f'(x) \geqslant 0$ donc $f$ est croissante sur $[1;+\infty[$.

c) On a : $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$

La droite $(D)$ est donc asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. De plus $(D)$ est au dessus de $\mathscr{C}$ car $-\dfrac{\ln x}{x} < 0$ si $x > 1$.

## EXERCICE 2 (5 points)

### Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

### Partie A

1) a) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, donc

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par composition} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^{x^2}} = 0\end{array} \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{par produit} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

b) $f$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit et composition de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

Sur $[0;+\infty[$, $e^{-x^2} > 0$ donc le signe de $f'$ est donné par $1 - 2x^2$.

Sur $[0;+\infty[$, $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ | $\searrow$ | $0$ |

2) a) On a : $f(x) = -\dfrac{1}{2}\left(-2xe^{-x^2}\right)$ or la primitive de $u'e^u$ est $e^u$ donc $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$

b) On a :

$$\mathscr{A}(a) = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_0^a = F(a) - F(0) = -\frac{1}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-a^2}\right)$$

c) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{a\to+\infty} -a^2 = -\infty \\ \lim\limits_{a\to-\infty} e^a = 0\end{array}\right\}$ par composition $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-a^2} = 0$ par somme $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathscr{A}(a) = \dfrac{1}{2}$

**Partie B**

1) a) D'après les variations de $f$, si $x \geqslant 1 > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ alors $f$ est décroissante, donc :

Si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant x \leqslant f(n)$ par l'inégalité de la moyenne, on obtient

$$f(n+1)[(n+1)-n] \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(n)[(n+1)-n] \quad \Leftrightarrow \quad f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$$

b) En appliquant l'inégalité ci-dessus à l'ordre $n$ et $n+1$ pour $n \geqslant 1$, on a :

$f(n+2) \leqslant u_{n+1} \leqslant f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$

La suite $(u_n)$ est donc décroissante.

c) On sait d'après la partie A que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ et comme $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$

D'après le théorème des gendarmes, la suite $(u_n)$ converge vers 0.

## Exercice 3 (7 points)

**Partie A : Existence et unicité de la solution**

1) On a les équivalences suivantes :

$$\text{(E)} : e^x = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x\,e^x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad x - e^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0$$

2) a) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et compostion de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a : $f'(x) = 1 + e^{-x}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ alors $f'(x) > 0$. La fonction $f$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Calculons les limites en $-\infty$ et $+\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -e^x = -\infty\end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-x} = -\infty$ par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -e^x = 0\end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x} = 0$ par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Donc sur $\mathbb{R}$, la fonction $f$ est continue (car dérivable) et monotone (croissante) et $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$. D'après la question 1) l'équation (E) admet donc une unique solution $\alpha$.

c) On a : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{e}} \simeq -0,107$ et $f(1) = 1 - \frac{1}{e} \simeq +0,632$ donc $f(1) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

d) Comme la fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$, si $x < \alpha$ alors $f(x) < 0$.
Donc si $x \in [0; \alpha[$, $f(x)$ est négative.

**Partie B : Deuxième approche**

1) On a les équivalences suivantes :

$$g(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+x}{1+e^x} = x \quad \Leftrightarrow \quad 1 + x = x + x\,e^x \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x\,e^x = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$e^{-x} - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - e^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0$$

2) Comme $\alpha$ est l'unique solution de $f(x) = 0$, d'après l'équivalence de la question précédente, $\alpha$ est l'unique solution de $g(x) = x$

3) $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme sommes et quotient de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{(1+e^x) - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1 + e^x - e^x - xe^2}{(1+e^x)^2} = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2}$$
$$= \frac{-e^x\,(x - e^{-x})}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x\,f(x)}{(1+e^x)^2}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ les fonctions $g'$ et $f$ sont de signe contraires.

Comme d'après A 2d), $f$ est négative sur $[0; \alpha[$ ; $g'$ est positive sur $[0, \alpha[$. $g$ est donc croissante sur $[0; \alpha[$.

**Partie C : Construction d'une suite de réels ayant pour limite $\alpha$**

1) Montrons par récurrence que : $(P_n)$ : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

- **Initialisation**
  $u_0 = 0$ , $u_1 = g(0) = \frac{1}{2}$ et $\alpha > \frac{1}{2}$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$. $P_0$ est vraie.
- **Hérédité**
  On admet que : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

  Comme la fonction $g$ est croissante sur $[0; \alpha[$, on a :

  $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(\alpha)$ or $g(0) = \frac{1}{2}$ et $g(\alpha) = \alpha$, donc

  $0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$ $P_{n+1}$ est vraie, donc $(P_n)$ est héréditaire.
- **Conclusion :** par initialisation et hérédité, la propostion $(P_n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

2) D'après la question précédente, la suite $(u_n)$ est croissante et majorée par $\alpha$, donc la suite $(u_n)$ est convergente.

3) On sait que la suite $(u_n)$ est convergente et que la fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable), donc d'après le théorème du point fixe, la limite $\ell$ est solution de l'équation $g(x) = x$.
Comme $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$, on a donc : $\ell = \alpha$

4) On obtient les valeurs

| $N$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $U$ | 0,566 311 | 0,567 143 | 0,567 143 | 0,567 143 |

Cet algorithme est donc très efficace car il donne la limite à $10^{-6}$ dès le troisième terme !

## EXERCICE 4 (5 points)

1) a) On a :

$$a' = i + i - \frac{1}{i} = i + i + i = 3i$$
$$b' = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - e^{-i\frac{\pi}{6}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + i - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2i$$

b) Cf figure à la fin

c) On a

$$\frac{-b}{b'-b} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{2i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{-\sqrt{3} - i}{-\sqrt{3} + 3i} = \frac{(-\sqrt{3} - i)(-\sqrt{3} - 3i)}{3+9}$$
$$= \frac{3 + 3\sqrt{3}\,i + \sqrt{3}\,i - 3}{12} = \frac{4\sqrt{3}\,i}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

d) On a :

$$(\overrightarrow{\text{BB'}}, \overrightarrow{\text{BO}}) = \arg\left(\frac{0-b}{b'-b}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}i\right) = \frac{\pi}{2}$$

Le triangle OBB'est donc rectangle en B.

2) a) En utilisant l'astuce de la forme canonique, on a :

$$z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

b) Les points M de (E) sont tels que $f(\text{M}) = \text{O}$. Si on considère l'affixe $z \neq 0$ de M, on a :

$$z + i - \frac{1}{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z^2 + iz - 1}{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + iz - 1 = 0$$

D'après la question précédente, les affixes des points de (E) vérifient :

$$\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 0$$

On obtient alors 2 solutions distinctes complexes :

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{ou} \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

c) Comme on a : $|z_1| = |z_2| = 1$, les points $\text{E}_1$ et $\text{E}_2$ correspondants appartiennent donc au cercle unité $(\Gamma)$

3) a) Si $z = e^{i\theta}$ alors

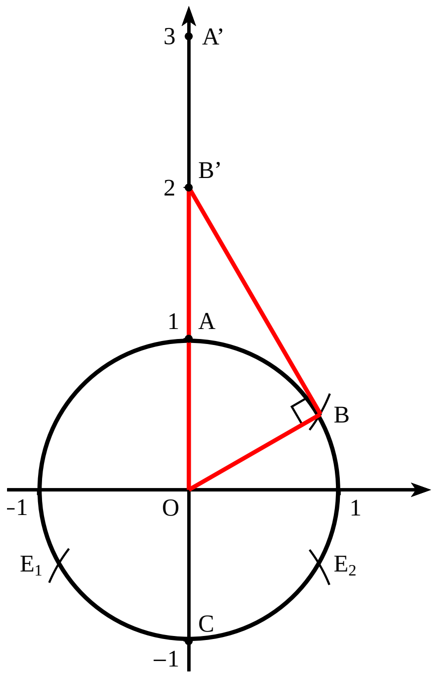
$$z + i - \frac{1}{z} = e^{i\theta} + i - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + i - \cos(-\theta) - i\sin(-\theta)$$
$$= \cos\theta + i\sin\theta + i - \cos\theta + i\sin\theta$$
$$= i\,(2\sin\theta + 1)$$

b) Si M($z$) $\in$ ($\Gamma$), alors $z = e^{\theta}$ et donc M'($z'$), d'après la question précédente est tel que : $z' = i\,(2\sin\theta + 1)$.

$z'$ étant un imaginaire pur, M' se situe sur l'axe des ordonnées.

De plus $-1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leqslant 2\sin\theta \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant 2\sin\theta + 1 \leqslant 3$

Conclusion : l'ordonnée du point $M'$ est comprise entre $-1$, ordonnée du point C et 3 ordonnée du point A', donc M'$\in$ [A'$C$]



## EXERCICE 2 (5 points)

**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**Proposition 1 : Vrai**

D'après les règles de compatibilité avec la congruence, on a :

$2^2 \equiv 1 \pmod 3 \;\Leftrightarrow\; \left(2^2\right)^n \equiv 1^n \pmod 3 \;\Leftrightarrow\; 2^{2n} \equiv 1 \pmod 3 \;\Leftrightarrow\; 2^{2n}-1 \equiv 0 \pmod 3$
Donc $2^{2n}-1$ est divisible par 3

**Proposition 2 : Faux**

Cela tient au fait que 6 n'est pas un nombre premier. Prenons le contre-exemple : $x = 2$, on a alors :

$x \equiv 2 \pmod 6$ et $x^2 \equiv 4 \pmod 6 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x \equiv 6 \pmod 6 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x \equiv 0 \pmod 6$

or $x \equiv 2 \pmod 3$ ce qui contredit la proposition

**Proposition 3 : Faux**

Il manque des solutions. Les solutions sont du type : $(4 + 5k\ ;\ 9 + 12k)$. Prenons alors une solution qui n'est pas dans l'ensemble proposée. Soit par exemple : $(9; 21)$

On a : $12 \times 9 - 5 \times 21 = 108 - 103 = 3$ donc (9 ;21) solution de l'équation.

Pourtant (9 ;12) n'est pas du type : $(4 + 10k; 9 + 24k)$

**Proposition 4 : Vrai**

On pose $m = \text{ppcm}(a, b)$ et $d = \text{pgcd}(a, b)$.

On décompose $a$ et $b$, $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$ avec $\text{pgcd}(a', b') = 1$

L'équation devient : $m - d = 1 \;\Leftrightarrow\; da'b' - d = 1 \;\Leftrightarrow\; d(a'b' - 1) = 1$

donc $d$ divise 1 et donc $d = 1$. Si $d = 1$, on a alors $a'b' - 1 = 1$ soit $a'b' = 2$. Comme $a < b$, on a $a' = 1$ et $b' = 2$. On en déduit : $a = 1$ et $b = 2$.

Conclusion : il existe un unique couple (1 ;2) solution de l'équation $m - d = 1$.

**Proposition 5 : Vrai**

Comme M est divisible par 27, on a donc :

$$\begin{aligned} &\mathrm{M} \equiv 0 \pmod{27} \;\Leftrightarrow\; \overline{abc} \equiv 0 \pmod{27} \;\Leftrightarrow\; 100a + 10b + c \equiv 0 \pmod{27} \\ &\text{or } 100 \equiv 19 \pmod{27} \;\Rightarrow\; 19a \equiv -10b - c \pmod{27} \quad (1) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{M} - \mathrm{N} &= \overline{abc} - \overline{bca} = 100a + 10b + c - 100b - 10c - a \\ &= 99a - 90b - 9c = 9(11a - 10b - c) \end{aligned}$$

Donc d'après la relation (1), on a : $11a - 10b - c \equiv 11a + 19a \equiv 30\,a \pmod{27}$

On a alors : $\mathrm{M} - \mathrm{N} \equiv 9\,(30\,a) \equiv 27 \times 10\,a \equiv 0 \pmod{27}$

$\mathrm{M} - \mathrm{N}$ est donc divisible par 27