# Chapitre 7 – Suites numériques

## I – Généralités sur les suites

Une suite est une liste de nombres partant d'un premier terme.

Le nombre $u_n$ (aussi noté $u(n)$ ) où $n \in \mathbb{N}$ est le *terme général de rang* $n$ de la suite $u$ – cette suite peut aussi se noter $(u_n)$ .

- $u_{n-1}$ est le terme qui précède $u_n$ , puisque $n-1$ est l'*indice* précédent $n$ ;
- de même, $u_{n+1}$ est le terme qui suit $u_n$ , puisque $n+1$ est l'indice suivant $n$ .

| **Rang** | $0$ | $1$ | $\dots$ | $n-1$ | $n$ | $n+1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Terme** | $u_0$ | $u_1$ | $\dots$ | $u_{n-1}$ | $u_n$ | $u_{n+1}$ |

Remarque : On peut donc voir une suite comme une fonction qui à un entier $n$ associe son image $u_n$ , le terme d'indice $n$ .

### a) Suite définie par une relation explicite

C'est le cas le plus simple : $u_n$ se calcule en fonction de l'indice $n$ .

*Exemple : On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ par $u_n = 3n^2 + 4$ .*

*Le premier terme est donc $u_3 = 3 \times 3^2 + 4 = 31$ – c'est le terme d'indice 3.*

*Le deuxième terme est donc $u_4 = 3 \times 4^2 + 4 = 52$ – c'est le terme d'indice 4.*

*Pour $n \geqslant 3$ , le terme d'indice $n+1$ est $u_{n+1} = 3(n+1)^2 + 4 = 3(n^2 + 2n + 1) + 4 = 3n^2 + 6n + 7$ .*

### b) Suite définie par une relation de récurrence

C'est plus complexe : $u_{n+1}$ se calcule en fonction de $u_n$ – c'est-à-dire qu'un terme se calcule en fonction du précédent.

*Exemple : On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = 3v_n^2 + 4$ et $v_0 = 0$ .*

*On a donc $v_1 = 3v_0^2 + 4 = 3 \times 0^2 + 4 = 4$ , $v_2 = 3v_1^2 + 4 = 3 \times 4^2 + 4 = 52$ , $v_3 = 3v_2^2 + 4 = 3 \times 52^2 + 4 = 8116$ , ...*

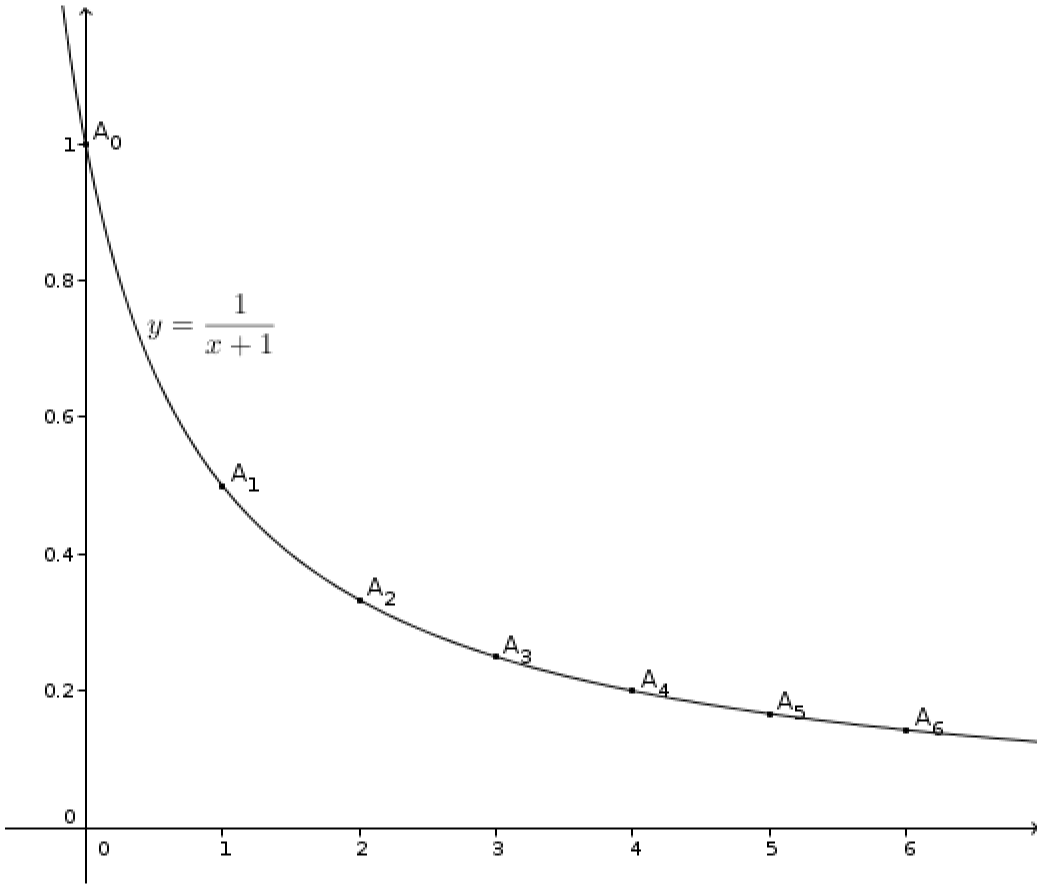
**c) Représentation graphique d'une suite**

Soit $(u_n)$ une suite numérique. On peut placer les points $A_n(n\,;v_n)$ dans un repère du plan.

*Exemple :* *Soit* $(u_n)$ *la suite définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $u_n = \frac{1}{n+1}$ .

*La suite est représentée par les points* $A_n\left(n; \frac{1}{n+1}\right)$ .

*Ce sont donc les points de la courbe de la fonction* $f(x) = \frac{1}{x+1}$ *dont les abscisses appartiennent à* $\mathbb{N}$ .




**d) Sens de variation d'une suite numérique**

**Définitions :**

- **Une suite numérique $(u_n)$ est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+1} \geqslant u_n$ .**
- **Une suite numérique $(u_n)$ est strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+1} \leqslant u_n$ .**
- **Une suite numérique $(u_n)$ est strictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+1} > u_n$ .**
- **Une suite numérique $(u_n)$ est strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $u_{n+1} < u_n$ .**

# II – Suites arithmétiques

## a) Définition

**Une suite $(u_n)$ est arithmétique si et seulement si, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours la même constante $r$ – c'est-à-dire, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$. La constante $r$ est la *raison* de la suite arithmétique.**

*Exemples :*

- *Considérons une suite $u$ telle que $u_0 = 3$ ; $u_1 = 5$ et $u_2 = 8$. $u_1 - u_0 = 2$ et $u_2 - u_1 = 3$ donc la suite n'est pas arithmétique vu que l'on n'ajoute pas la même quantité pour passer de $u_0$ à $u_1$ et de $u_1$ à $u_2$.*
- *Soit $u$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n + 6$.*

  *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 6 - (5n+6) = 5n + 5 + 6 - 5n - 6 = 5$ donc $u$ est arithmétique de raison 5.*

## b) Terme général

Illustration : Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$.

On a donc :

- $u_1 = u_0 + r$.
- $u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r$.
- $u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r$.
- …
- $u_n = u_0 + nr$.

**Théorème : Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$.**

**On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.**

**On a également, pour $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.**

Remarque : Plus généralement, si $u$ est arithmétique de raison $r$, pour tous entiers $n$ et $p$ avec $p \leqslant n$, on a $u_n = u_p + (n-p)r$.

*Exemple : Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison 3 telle que $u_0 = 5$.*

*On alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times 5 = 3 + 5n$. Par exemple, $u_7 = 3 + 5 \times 7 = 38$ et $u_{20} = 3 + 5 \times 20 = 63$ – on pouvait aussi remarquer que $u_{20} = u_7 + 13 \times 5 = 63$.*

**c) Sens de variation**

**Théorème : Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$ .**

- **$(u_n)$ est strictement croissante si et seulement si $r>0$ .**
- **$(u_n)$ est strictement décroissante si et seulement si $r<0$ .**
- **$(u_n)$ est constante si et seulement si $r>0$ .**

**d) Représentation graphique**

**Théorème : Soit $(u_n)$ une suite.**

**$(u_n)$ est arithmétique si et seulement si elle est représentée par des points alignés.**

Preuve :

- Si $(u_n)$ est arithmétique, il existe $r$ tel que $u_n=u_0+nr$ . Les points $A_n$ représentant la suite ont donc pour coordonnées $(n;u_0+nr)$ . Ils sont donc alignés sur la droite d'équation $y=rx+u_0$ .
- Réciproquement, si les points $A_n$ représentant la suite sont alignés sur une droite d'équation $y=ax+b$ , alors on a $u_n=an+b$ . $(u_n)$ est donc arithmétique de raison $a$ et de premier terme $u_0=b$ .

# III – Suites géométriques

**a) Définition**

**Une suite $(u_n)$ est géométrique si et seulement si, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par la même constante $q$ – c'est-à-dire, si pour tout $n\in\mathbb{N}$ , $u_{n+1}=u_n\times q$ avec $q\in\mathbb{R}$ . La constante $q$ est la *raison* de la suite géométrique.**

*Exemples :*

- *Considérons une suite $u$ telle que $u_0=6$ ; $u_1=3$ et $u_2=1$ . $\frac{u_1}{u_0}=\frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{3}$ donc la suite n'est pas géométrique vu que l'on ne multiplie pas par la même quantité pour passer de $u_0$ à $u_1$ et de $u_1$ à $u_2$ .*
- *Soit $u$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=5\times 3^n$ .*

  *Pour tout $n\in\mathbb{N}$ , $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5\times 3^{n+1}}{5\times 3^n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=3$ donc $u$ est géométrique de raison 3.*

**b) Terme général**

Illustration : Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$ .

On a donc :

- $u_1=u_0\times q$ .
- $u_2=u_1\times q=u_0\times q\times q=u_0\times q^2$ .
- …
- $u_n=u_0\times q^n$ .

**Théorème : Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$ .**

**On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ , $u_n=u_0\times q^n$ .**

**On a également, pour $n\geqslant 1$ , $u_n=u_1\times q^{n-1}$ .**

Remarque : Plus généralement, si $u$ est géométrique de raison $q$ , pour tous entiers $n$ et $p$ avec $p\leqslant n$ , on a $u_n=u_p\times q^{n-p}$ .

*Exemple : Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison 2 telle que $u_0=1$ .*

*On alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ , $u_n=u_0\times 2^n=1\times 2^n=2^n$ . Par exemple, $u_7=2^7=128$ et $u_{20}=2^{20}=1\,048\,576$ – on pouvait aussi remarquer que $u_{20}=u_7\times 2^{13}=128\times 2^{13}=1\,048\,576$ .*

**c) Sens de variation**

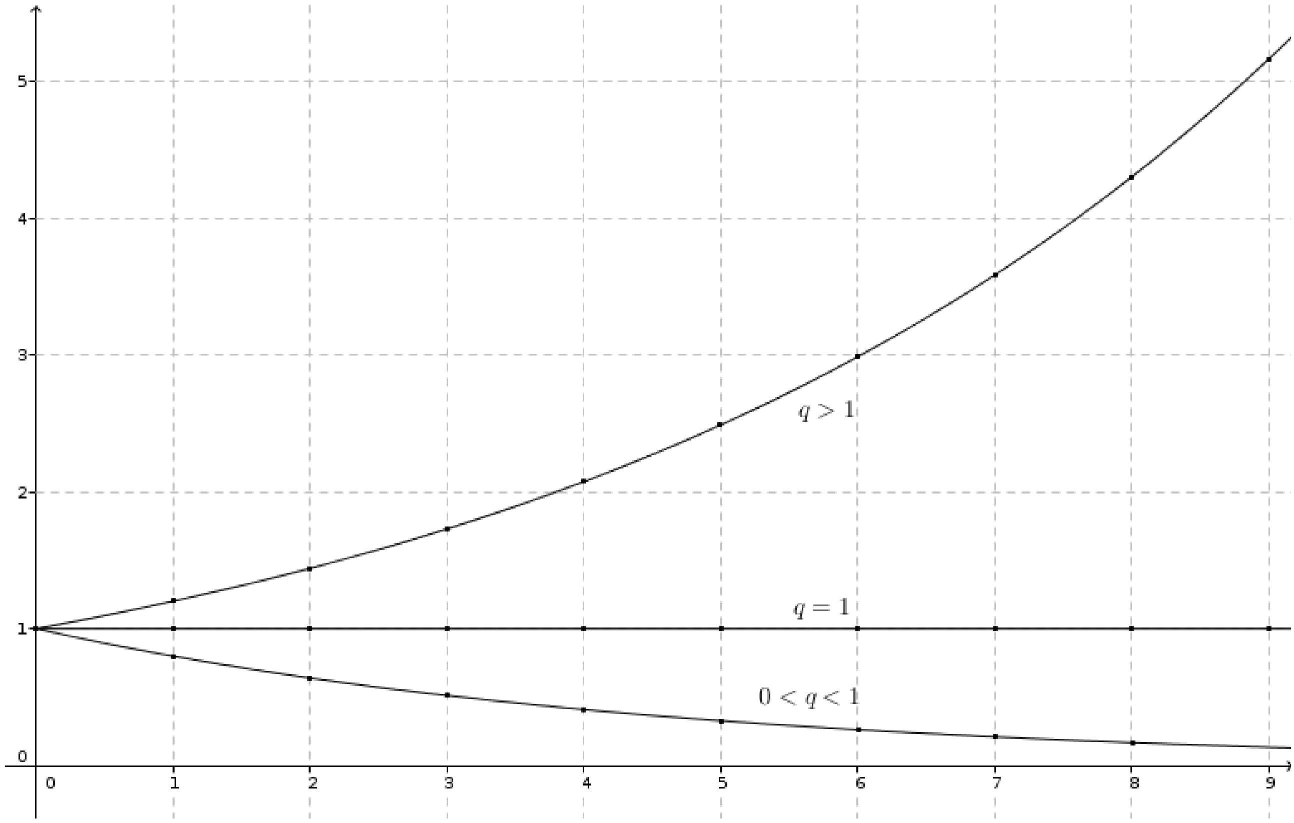
**Théorème : Soit $q$ un réel strictement positif.**

- **Si $q>1$ , la suite géométrique de terme général $q^n$ est strictement croissante.**
- **Si $0<q<1$ , la suite géométrique de terme général $q^n$ est strictement décroissante.**
- **Si $q=1$ , la suite géométrique de terme général $q^n$ est constante et égale à 1.**

Preuve : Pour $n\in\mathbb{N}$ , $q^{n+1}-q^n=q^n(q-1)$ . Comme $q>0$ , le signe de $q^{n+1}-q^n$ est celui de $q-1$ .

- Si $q>1$ , $q-1>0$ donc $q^{n+1}-q^n>0$ donc $q^{n+1}>q^n$ . $(q^n)$ est strictement croissante.
- Si $0<q<1$ , $q-1<0$ donc $q^{n+1}-q^n<0$ donc $q^{n+1}<q^n$ . $(q^n)$ est strictement décroissante.
- Si $q=1$ , $q-1=0$ donc $q^{n+1}-q^n=0$ donc $q^{n+1}=q^n$ . $(q^n)$ est constante et vaut 1.

*Illustration :*




Remarque : Si $u_0 \neq 0$, le fait de multiplier la suite $(q^n)$ par $u_0$ inverse le sens de variation si et seulement si $u_0 < 0$.

On en déduit donc ce tableau donnant le sens de variation d'une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q > 0$ :

| | $q > 1$ | $0 < q < 1$ | $q = 1$ |
|---|---|---|---|
| $u_0 > 0$ | Strictement croissant | Strictement décroissant | Constante |
| $u_0 < 0$ | Strictement décroissant | Strictement croissant | Constante |