

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI - MONTPELLIER

EXERCICE 5.1

Soit la fonction définie sur $I = [-2; 5]$ par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 1$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x) = 2x - 6$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I , et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$$

x	-2	3	5
$f'(x)$	-	0	+

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	-2	3	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	17	-8	-4

$$f(-2) = (-2)^2 - 6 \times (-2) + 1 = 4 + 12 + 1 = 17$$

$$f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 1 = 9 - 18 + 1 = -8$$

$$f(5) = 5^2 - 6 \times 5 + 1 = 25 - 30 + 1 = -4$$

EXERCICE 5.2

Soit la fonction définie sur $I = [-5; 8]$ par :

$$f(x) = -2x^2 + x - 5$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x) = -4x + 1$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I , et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -4x + 1 > 0 \Leftrightarrow -4x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$$

x	-5	$\frac{1}{4}$	8
$f'(x)$	+	0	-

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	-5	$\frac{1}{4}$	8
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-60	$-\frac{39}{8}$	-125

$$f(-5) = -2 \times (-5)^2 + (-5) - 5 = -2 \times 25 - 5 - 5 = -60$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} - 5 = -2 \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 5$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{2}{8} - \frac{40}{8} = -\frac{39}{8}$$

$$f(8) = -2 \times 8^2 + 8 - 5 = -2 \times 64 + 8 - 5 = -125$$

EXERCICE 5.3

Soit la fonction définie sur $I = [0; 4]$ par :

$$f(x) = -3x^2 - 5x + 7$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x) = -6x - 5$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I .

En déduire le tableau de signe de $f'(x)$ sur I .

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -6x - 5 > 0 \Leftrightarrow -6x > 5 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{6}$$

Or $-\frac{5}{6} \notin [0; 4]$

x	0	4
$f'(x)$	-	-

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	0	4
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	7	-61

$$f(0) = -3 \times 0^2 - 5 \times 0 + 7 = 7$$

$$f(4) = -3 \times 4^2 - 5 \times 4 + 7 = -3 \times 16 - 20 + 7 = -61$$

EXERCICE 5.4

Soit la fonction définie sur $I = [-3; 3]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x) = x^2 - x - 2$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I , et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2$$

$$x_1 = \frac{-(-1) - 3}{2 \times 1} = \frac{1 - 3}{2} = -1, x_2 = \frac{-(-1) + 3}{2 \times 1} = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

$a = 1$ donc $a > 0$: le polynôme est tourné vers le haut

x	-3	-1	2	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	-3	-1	2	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\frac{13}{2}$	$\frac{13}{6}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{2}$	

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} - 2 \times (-3) + 1$$

$$= -9 - \frac{9}{2} + 6 + 1 = -2 - \frac{9}{2} = -\frac{13}{2}$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2 \times (-1) + 1$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 1 = -\frac{5}{6} + 3 = -\frac{13}{6}$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 \times 2 + 1$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 + 1 = \frac{8}{3} - 5 = -\frac{7}{3}$$

$$f(3) = \frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} - 2 \times 3 + 1$$

$$= 9 - \frac{9}{2} - 6 + 1 = 4 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$$

EXERCICE 5.5

Soit la fonction définie sur $I = [-2; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x) = x^2 - 2x - 3$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I , et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - 4}{2 \times 1} = \frac{2 - 4}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{-(-2) + 4}{2 \times 1} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

$a = 1$ donc $a > 0$: le polynôme est tourné vers le haut
La dérivée est négative si $x \in [-1; 3]$

Or $3 \notin [-2; 2]$

x	-2	-1	2
$f'(x)$	+	0	-

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	-2	-1	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{19}{3}$

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1$$

$$= \frac{-8}{3} - 4 + 6 + 1 = \frac{1}{3}$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3 \times (-1) + 1$$

$$= \frac{-1}{3} - 1 + 3 + 1 = \frac{8}{3}$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} - 2^2 - 3 \times 2 + 1$$

$$= \frac{8}{3} - 4 - 6 + 1 = -\frac{19}{3}$$

EXERCICE 5.6

Soit la fonction définie sur $I = [-1; 3]$ par :

$$f(x) = x^3 - x^2 + x + 8$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I , et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 - 12 = -8 \rightarrow \Delta < 0$$

Il n'y a pas de solution : la dérivée ne s'annule pas
 $a = 1$ donc $a > 0$: le polynôme est tourné vers le haut

x	-1	3
$f'(x)$	+	

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	-1	3
$f'(x)$	+	
$f(x)$	5	29

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + (-1) + 8$$

$$= -1 - 1 - 1 + 8 = 5$$

$$f(3) = 3^3 - 3^2 + 3 + 8$$

$$= 27 - 9 + 3 + 8 = 29$$

EXERCICE 5.7

Soit la fonction définie sur $I = [-3; 3]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + 5$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x) = x^2 - 4x + 4$

a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I , et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16 - 16 = 0$$

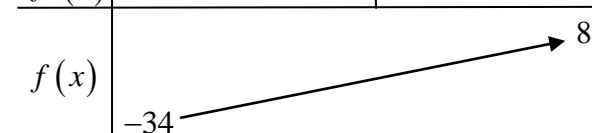
Solution double : $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$

$a = 1$ donc $a > 0$: le polynôme est tourné vers le haut

x	-3	2	3
$f'(x)$	+	0	+

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	-3	2	3
$f'(x)$	+	0	+



$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{3} - 2 \times (-3)^2 + 4 \times (-3) + 5 = -9 - 2 \times 9 - 12 + 5 = -34$$

$$f(3) = \frac{3^3}{3} - 2 \times 3^2 + 4 \times 3 + 5 = 9 - 2 \times 9 + 12 + 5 = 8$$

EXERCICE 5.8

Soit la fonction définie sur $I = [-1; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{2x-5}{x+2}$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x) = \frac{9}{(x+2)^2}$

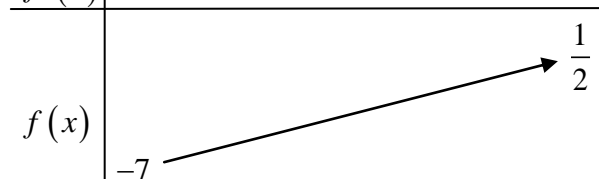
a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I , et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

Le numérateur et le dénominateur sont positifs donc la dérivée est positive.

x	-1	4
$f'(x)$	+	

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	-1	4
$f'(x)$	+	



$$f(-1) = \frac{2 \times (-1) - 5}{(-1) + 2} = \frac{-2 - 5}{1} = -7$$

$$f(4) = \frac{2 \times 4 - 5}{4 + 2} = \frac{8 - 5}{6} = \frac{1}{2}$$

EXERCICE 5.9

Soit la fonction définie sur $I = [1; 3]$ par :

$$f(x) = \frac{5x-1}{3x-2}$$

On a calculé sa dérivée : $f'(x) = \frac{-7}{(3x-2)^2}$

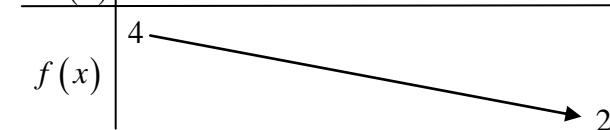
a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur I , et récapituler les résultats dans un tableau de signe.

Le numérateur est négatif et le dénominateur est positif donc la dérivée est négative.

x	1	3
$f'(x)$	-	

b. En déduire le tableau de variation de f (sans oublier les valeurs remarquables de f).

x	1	3
$f'(x)$	-	



$$f(1) = \frac{5 \times 1 - 1}{3 \times 1 - 2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$f(3) = \frac{5 \times 3 - 1}{3 \times 3 - 2} = \frac{15 - 1}{9 - 2} = \frac{14}{7} = 2$$