PROBABILITÉS

EXERCICE 1

Une entreprise fabrique un produit destiné à l'exportation.
Sur le marché extérieur la demande (en milliers d'unités) est régie par la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	$6a$	$4a$	$2a$	$2a$	a

Si l'entreprise dispose d'un stock de 3 000 unités du produit, quelle est la probabilité qu'il y ait rupture de stock ?

EXERCICE 2

Dans une entreprise, on a relevé qu'au cours d'une année : 40% des salariés ont été absents au moins 1 jour ; 30% des salariés ont été absents au moins 2 jours ; 15% des salariés ont été absents au moins 3 jours ; 10% des salariés ont été absents au moins 4 jours ; 5% des salariés ont été absents au moins 5 jours.
On choisit au hasard un salarié de cette entreprise. Quelle est la probabilité pour que ce salarié :

1. n'ait jamais été absent au cours de cette année ?
2. ait été absent une seule journée au cours de cette année ?
3. ait été absent au plus 3 jours ?

EXERCICE 3

Les résultats d'une enquête sur l'audience de deux magazines A et B, sont les suivants :
3 % de la population lit les deux magazines. Le magazine A est lu par 12 % de la population tandis que le magazine B est lu par 7 % de la population.
On interroge une personne de cette population au hasard.

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ne lise pas le magazine A.
2. Calculer la probabilité que la personne interrogée ne lise aucun des deux magazines.

EXERCICE 4

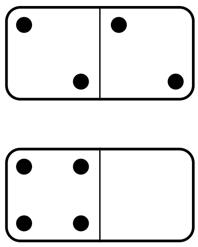
Un musée propose à la vente trois sortes de billets : un billet à 9 € pour visiter uniquement les collections permanentes ; un billet à 11 € pour visiter uniquement l'exposition temporaire ou un billet à 13 € pour visiter les collections permanentes et l'exposition temporaire.
On sait que : 60% des visiteurs visitent l'exposition temporaire et 45% des visiteurs achètent un billet à 11 €.

1. Établir la loi de probabilité associée au prix d'un billet.
2. Quelle est la recette quotidienne que peut espérer ce musée si le nombre de visiteurs par jour est en moyenne de 20 000 ?

EXERCICE 5

(*D'après sujet bac La Réunion 2007*)

Un domino est une petite plaque partagée en deux parties.
Sur chacune des parties figure une série de points. Il peut y avoir de zéro à six points dans une série. Un jeu de dominos comporte 28 dominos, tous différents.
Lors d'une fête, on propose le jeu suivant :



— le joueur tire au hasard un domino parmi les 28 dominos du jeu,

— il gagne, en euros, la somme des points figurant sur le domino tiré.

On suppose que tous les dominos du jeu ont la même probabilité d'être tirés

1. Établir la loi de probabilité des gains possibles.
2. Le joueur doit miser 7 € avant de tirer un domino. En se fondant sur le calcul des probabilités, peut-il espérer récupérer ses mises à l'issue d'un grand nombre de parties ?

EXERCICE 6

Une urne contient des jetons : 10 rouges, 36 bleus et 54 blancs. Un jeu de hasard est organisé de la manière suivante, après avoir misé une certaine somme, un joueur tire un jeton dans l'urne :

— Si le jeton est rouge, il perd le cube de sa mise de départ.

— Si le jeton est bleu, il gagne le carré de sa mise de départ.

— Si le jeton est blanc, il gagne sa mise de départ.

1. On suppose que la mise de départ est de 5 euros.
   a) Déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble des gains possibles.
   b) Calculer le gain moyen que l'on peut espérer réaliser sur un grand nombre de parties avec la même mise de départ de 5 euros.
2. Un joueur cherche à déterminer le montant de la mise de départ pour que le gain moyen réalisé sur un grand nombre de parties soit maximal. Soit x la mise de départ en euros.
   a) Montrer que l'espérance mathématique de loi de probabilité du gain est :
   $$f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}36x^2 + 0{,}54x$$
   b) Étudier les de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Conclure sur le problème posé.

EXERCICE 7

Un casino organise un jeu de dés. La mise du joueur pour participer à ce jeu est de n euros, ensuite, le joueur lance deux dés et gagne en euros, le double de la somme des deux dés.
En supposant que ce jeu ait du succès, quel doit être le montant minimal de la mise du joueur pour que le casino ne perde pas d'argent ?

EXERCICE 8

Un énoncé contient 3 coquilles. À chaque relecture la probabilité de détection d'une erreur ayant subsisté est de 0,8.

1. Établir la loi de probabilité du nombre de coquilles qui subsistent après la première relecture.
2. Après une deuxième relecture, quelle est la probabilité qu'il subsiste encore au moins une erreur ?

EXERCICE 9

À l'occasion de la fête du cinéma, le service de publicité d'un quotidien propose chaque jour la possibilité de gagner une place de cinéma sous forme de cartes à gratter.
Dans 13% des journaux mis en vente on trouve une carte gagnante.
Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'un client qui a acheté pendant cinq jours ce quotidien gagne au moins une place de cinéma ?

EXERCICE 10

Une usine fabrique des plaques d'isolation phonique. Une machine de cette usine est chargée de percer des trous dans ces plaques de 80 mm de diamètre.
On décide de contrôler la qualité des trous dans la production d'une journée. On suppose que la probabilité qu'un trou soit défectueux est 0,05.
On note X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 trous choisis au hasard, associe le nombre de trous défectueux.
La production quotidienne des plaques est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler le choix des 100 trous à un tirage avec remise pour assurer l'indépendance des choix.

1. a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X (*justifier votre réponse*).

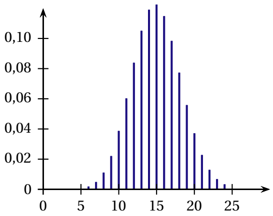
b) Donner les paramètres de cette loi.

2. Calculer une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de la probabilité pour un tel échantillon :
   a) de n'avoir aucun trou défectueux ;
   b) d'avoir un seul trou défectueux ;
   c) d'avoir au moins deux trous défectueux.

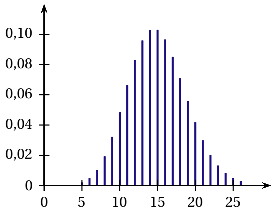
EXERCICE 11

On a représenté ci-dessous, la distribution de probabilité de quatre variables aléatoires suivant des lois binomiales.

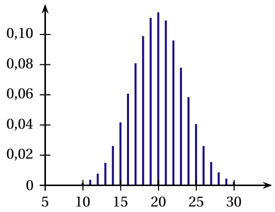
Graphique 1



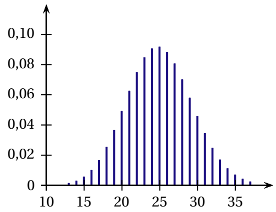
Graphique 2



Graphique 3



Graphique 4



— La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(50;0,4)$ de paramètres $n=50$ et $p=0,4$.

— La variable aléatoire Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(50;0,3)$ de paramètres $n=50$ et $p=0,3$.

Associer à chacune des deux lois $\mathscr{B}(50;0,4)$ et $\mathscr{B}(50;0,3)$ son graphique.

EXERCICE 12

Une entreprise fabrique des articles en grande quantité. Une étude statistique a permis de constater que 10% des articles fabriqués sont défectueux.

PARTIE A

Les articles fabriqués peuvent présenter au maximum deux défauts notés a et b. On note :

A l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut a » ;

B l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut b » ;

On donne les probabilités suivantes : $p(A)=0,05$; $p(B)=0,06$.

1. Traduire par une phrase l'évènement $A\cup B$. Donner la probabilité de l'évènement $A\cup B$.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard ne présente aucun défaut » ?
3. Calculer la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard présente les deux défauts ».
4. Calculer la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard n'a qu'un seul des deux défauts ».

PARTIE B

On prélève au hasard 40 articles dans le stock, pour vérification.
Le stock est suffisamment important pour assimiler le lot de 40 articles à un tirage avec remise de 40 articles.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 40 articles dans ce stock, associe le nombre d'articles ayant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Interpréter le résultat.
3. Déterminer la probabilité de trouver quatre articles qui ont un défaut.
4. Déterminer la probabilité qu'au moins un article a un défaut.
5. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence d'articles défectueux dans un échantillon de taille 40.

EXERCICE 13

Une machine produit des pièces, dont certaines sont défectueuses à cause de deux défauts possibles, le défaut A et le défaut B, à l'exclusion de tout autre défaut.
On a constaté que, parmi les pièces produites par la machine, 7% ont le défaut A, 5% ont le défaut B, et 4% ont les deux défauts.
On choisit au hasard une des pièces produites par la machine. On note :

— A l'évènement : « La pièce a le défaut A »;

— B l'évènement : « La pièce a le défaut B ».

PARTIE A

1. Quelle est la probabilité de tomber sur une pièce défectueuse?
2. Traduire par une phrase l'évènement $A \cap \overline{B}$. Calculer la probabilité de l'évènement $A \cap \overline{B}$?
3. Quelle est la probabilité de tomber sur une pièce qui a seulement le défaut B?
4. Quelle est la probabilité de tomber sur une pièce défectueuse qui n'a qu'un seul défaut?

PARTIE B

On prélève au hasard 100 pièces dans le stock, pour vérification.
Le stock est suffisamment important pour assimiler le lot de 100 pièces à un tirage avec remise de 100 pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 pièces dans ce stock, associe le nombre de pièces ayant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type σ.
3. Déterminer la probabilité de trouver 8 pièces qui ont un défaut.
4. Déterminer la probabilité qu'au moins deux pièces ont un défaut.
5. Déterminer la probabilité que dans un lot de 100 pièces on trouve entre 5 et 11 pièces qui ont un défaut.
6. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de pièces défectueuses dans un échantillon de taille 100.
   En déduire le nombre de pièces défectueuses que l'on peut trouver dans un lot de 100 pièces avec une probabilité proche de 0,95.

EXERCICE 14

Une machine fabrique 10 000 pièces par jour. En sortie de fabrication, on a constaté qu'une pièce pouvait présenter deux sortes de défauts A ou B et, qu'en moyenne :

— 9 % des pièces fabriquées présentent le défaut A;

— 10 % des pièces fabriquées présentent le défaut B;

— 11 % des pièces fabriquées présentent à la fois les défauts A et B.

PARTIE A

On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

1. Calculer la probabilité p_1 qu'elle n'ait aucun défaut.
2. Calculer la probabilité p_2 qu'elle présente un seul défaut.

PARTIE B

Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la machine, on tolère que la proportion p de pièces défectueuses dans la production est 8 %.
On contrôle le bon fonctionnement de la machine en prélevant au hasard dans la production des échantillons de n pièces.
Le stock est suffisamment important pour assimiler un tel prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de n pièces dans le stock, associe le nombre de pièces défectueuses.

1. Au cours de l'un de ces contrôles, un technicien a prélevé au hasard dans la production un échantillon de 40 pièces.
   a) Déterminer la probabilité qu'il y ait trois pièces défectueuses dans cet échantillon.
   b) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins trois pièces défectueuses dans cet échantillon.
   c) Le technicien a trouvé six pièces défectueuses.
   Doit-il prendre la décision d'effectuer des réglages sur la machine ?
2. Un deuxième technicien a prélevé un échantillon de 100 pièces et trouve la même proportion de 15 % de pièces défectueuses.
   Doit-il prendre la décision d'effectuer des réglages sur la machine ?

EXERCICE 15

Un grossiste propose des perles de culture pour fabriquer des bijoux.
Ces perles peuvent présenter deux sortes d'irrégularité (couleur ou forme). Les perles qui présentent les deux sortes d'irrégularité sont déclassées. Une étude statistique a permis d'établir que :

— 18% des perles sont déclassées ;
— 24% des perles présentent une irrégularité de couleur ;
— 16% des perles présentent une irrégularité de forme.

On choisit au hasard dans le stock une perle et on note :

— C l'évènement « la perle présente une irrégularité de couleur » ;
— F l'évènement « la perle présente une irrégularité de forme ».

PARTIE A

1. Traduire par une phrase l'évènement $C \cup F$. Calculer $P(C \cup F)$.
2. Quelle est la probabilité que la perle choisie ne présente aucune irrégularité ?

PARTIE B

On prélève au hasard un lot de 50 perles dans le stock, pour vérification.
Le stock est suffisamment important pour assimiler le lot de 50 perles à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 perles dans ce stock, associe le nombre de perles déclassées.

1. a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.
2. a) Déterminer la probabilité de trouver 9 perles déclassées dans ce lot.
   b) Déterminer la probabilité qu'au moins deux perles du lot soient déclassées.
   c) Déterminer la probabilité de trouver dans ce lot entre 7 et 10 perles déclassées.
3. On a trouvé dans ce lot, 14 perles déclassées. Ce résultat est-il compatible avec la proportion de 18% des perles déclassées donnée par le grossiste ?