Chapitre 1 – Pourcentages

I – Proportions

<u>Illustration :</u> *On sait que dans un lycée, il y a 368 filles et 450 garçons. On voudrait connaître le pourcentage d'élèves dans ce lycée qui sont des filles.*

<u>Définition :</u> Une proportion (ou part) est le rapport du nombre d'éléments de la partie qui nous intéresse par le nombre total d'éléments.

<u>Exemple :</u> *Dans ce lycée, il y a donc* $368+450=818$ *élèves. La proportion de filles parmi les élèves est donc* $\frac{368}{818}\approx 0{,}45$ *. On peut donc dire que dans le lycée il y a environ 45 % de filles – et donc 55 % de garçons.*

<u>Remarques :</u> Une proportion est toujours comprise en 0 (0 %) et 1 (100 %).

Calculer p % d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{p}{100}$.

II – Taux d'évolution

<u>a) Détermination d'un taux d'évolution</u>

<u>Illustration :</u> *On sait qu'un article, qui coûtait 28 €, coûte maintenant 35 €. On cherche à savoir quel est son taux d'évolution, c'est-à-dire à quelle proportion (par rapport au prix de départ) correspond l'augmentation.*

Dans ce cas, l'article a augmenté de $35-28=7$ *€. On calcule la proportion :* $\frac{7}{28}=0{,}25=25$ *%.*

Le prix a augmenté de 25 %.

<u>Définition :</u> Une quantité évolue d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2 .

Le taux d'évolution t de y_1 à y_2 est $t=\frac{y_2-y_1}{y_1}$.

<u>Exemple :</u> Le nombre de naissances dans un pays est passé de 45 000 à 33 000. Le taux d'évolution est donc $t=\frac{33000-45000}{45000}\approx -0{,}27$ *, soit une baisse de 27 % environ.*

<u>Remarques :</u>

- Si $t>0$, il s'agit d'une augmentation, si $t<0$, il s'agit d'une diminution.
- Un taux d'évolution peut dépasser 100 %.

b) Appliquer un taux d'évolution

<u>Illustration :</u> La température d'une pièce est de 28 °C. Elle augmente de 25 %, c'est-à-dire de $28\times\frac{25}{100}=7$ °C.

Elle est donc maintenant de $28+7=33$ °C.

On a finalement calculé $28+28\times\frac{25}{100}=28\times1+28\times\frac{25}{100}=28\times1+28\times\frac{25}{100}=28\times\left(1+\frac{25}{100}\right)$.

<u>Propriété :</u> Faire subir une évolution de taux t , c'est multiplier une quantité par le <u>coefficient multiplicateur</u> $1+t$.

<u>Exemple :</u> Faire subir une évolution de taux $t=-20\,\%$ *, c'est donc multiplier par* $1-\frac{20}{100}=0{,}8$.

III – Taux réciproque

<u>Illustration :</u> Pour les soldes, un prix a baissé de 30 %. On cherche quelle évolution lui faire subir pour revenir au prix initial.
Si $t\neq-1$ est l'évolution subie, le coefficient multiplicateur est $1+t$, on cherche donc l'évolution réciproque t' telle que les évolutions successives de taux t et t' équivalent à une évolution de taux 0, c'est-à-dire $(1+t)(1+t')=1\Leftrightarrow 1+t'=\frac{1}{1+t}$.

<u>Propriété :</u> Si une quantité subit une évolution de taux $t\neq-1$, l'évolution réciproque de taux t' vérifie $t'=\frac{1}{1+t}-1$.

<u>Exemple :</u> Si une quantité subit une augmentation de 25 %, le taux t' *de l'évolution réciproque est* $t'=\frac{1}{1+0{,}25}-1=\frac{1}{1{,}25}-1=-0{,}2=-20\,\%$.
Une diminution de 20 % compense une augmentation de 25 %.

IV – Indices

Illustration : En France, une nouvelle méthode de recensement a été mise en place en 2004.

Si on veut rapidement savoir dans quelle proportion évolue la population, on peut choisir 2004 comme année de référence, et lui attribuer « l'indice 100 » – c'est-à-dire faire comme si il y avait 100 habitants seulement en France en 2004. Par proportionnalité, l'indice en 2005 était de 100,8. On peut donc en conclure que la population française a augmenté de 0,8 %.

Définition : y_1 et y_2 sont deux valeurs d'une même grandeur.

Définir l'indice base 100 de cette grandeur correspondant à y_1, c'est associer à y_1 la valeur $I_1=100$. Par proportionnalité, on calcule l'indice I_2 associe à y_2.

Propriété : On a donc $\frac{I_2}{I_1}=\frac{y_2}{y_1}$ donc $I_2=100\times\frac{y_2}{y_1}$.

Exemple : Le taux de natalité en France pour 1 000 habitants était de 18,70 en 1960 et de 12,83 en 2010. On choisit comme indice de base 100 le taux de natalité pour 1 000 habitants en 1960.

L'indice en 2010 est donc $100\times\frac{12,83}{18,70}\approx 68,6$.

V – Évolutions successives

Illustration : Une quantité peut subir plusieurs évolutions successives – par exemple une diminution de 50 %, puis une augmentation de 30 %, puis une diminution de 10 %. À chaque étape, la nouvelle quantité est égale à la quantité précédente multipliée par un coefficient multiplicatif de la forme $1+t$ où t est le taux d'évolution. On cherche le taux d'évolution global.

Si une quantité subit n évolutions de taux respectifs t_1, t_2, …, t_n, la quantité a été multipliée par $(1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_n)$. Si T est le taux qui correspond à l'évolution globale, on a alors $1+T=(1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_n)$.

Propriété : Si une quantité subit n évolutions de taux respectifs t_1, t_2, …, t_n, alors le taux global T vérifie $T=(1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_n)-1$.

Exemple : Une quantité subit une augmentation de 10 %, une diminution de 20 %, une augmentation de 50 %.

Le taux global T est donc $T=\left(1+\frac{10}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)\left(1+\frac{50}{100}\right)-1=1,1\times0,8\times1,5-1=0,32=32\,\%$.

L'évolution globale est une augmentation de 32 %.

Une augmentation de 10 %, suivie d'une diminution de 20 %, suivie d'une augmentation de 50 % équivalent à une seule augmentation de 32 %.