CORRIGE - Notre Dame de La Merci - *Montpellier*

Exercice 1 : Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

$u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ $\rightarrow u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{1 \times n}{(n+1) \times n} - \frac{1 \times (n+1)}{n \times (n+1)} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}$$

$u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

$v_n = n + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ $\rightarrow v_{n+1} = n + 1 + \frac{1}{n+1}$

$$v_{n+1} - v_n = \left(n + 1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(n + \frac{1}{n}\right) = \boxed{n} + 1 + \frac{1}{n+1} \boxed{-n} - \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{n(n+1)} + \frac{n}{n(n+1)} - \frac{(n+1)}{n(n+1)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(n+1)}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n(n+1) - 1}{n(n+1)}$$

Si $n \geq 1$ alors $n(n+1) - 1 > 1$

$v_{n+1} - v_n > 0$ donc la suite (v_n) est croissante.

$w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour $n \geq 1$ $\rightarrow w_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-n} = \frac{1}{3}$$

$0 < \frac{w_{n+1}}{w_n} < 1$ donc la suite (w_n) est décroissante.

Exercice 2 Etudier le sens de variation des suites ci-dessous :

a) $u_n = -\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\rightarrow$ $u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{2(n+1)}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{2(n+1)}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2n}{3} - \frac{1}{2}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{-2n - 2 + 2n}{3} = -\frac{2}{3}$: $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

b) $v_n = n^2 + 4n$ $(n \in \mathbb{N})$ $\rightarrow$ $v_{n+1} - v_n = \left((n+1)^2 + 4(n+1)\right) - \left(n^2 + 4n\right) = (n+1)^2 + 4n + 4 - n^2 - 4n$

$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - n^2 + 4 = (n+1+n) \times (n+1-n) + 4 = (2n+1) \times 1 + 4 = 2n + 5$

$2n + 5 > 0 \Leftrightarrow 2n > -5 \Leftrightarrow n > -\frac{5}{2}$, or $n > 0$ donc la suite (v_n) est croissante.

c) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - n^2 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\rightarrow$ $u_{n+1} - u_n = -n^2$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est décroissante.

d) $u_n = -\frac{n}{4} + \frac{1}{3}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\rightarrow$ $u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{n+1}{4} + \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{n}{4} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{n+1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{n}{4} - \frac{1}{3} = \frac{-n-1+n}{4} = -\frac{1}{4}$

$u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

e) $v_n = n^2 - 4n$ $(n \in \mathbb{N})$ $\rightarrow$ $v_{n+1} - v_n = \left((n+1)^2 - 4(n+1)\right) - \left(n^2 - 4n\right) = (n+1)^2 - 4n - 4 - n^2 + 4n$

$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - n^2 - 4 = (n+1+n) \times (n+1-n) - 4 = (2n+1) \times 1 - 4 = 2n - 3$

$2n-3>0 \Leftrightarrow 2n>3 \Leftrightarrow n>\frac{3}{2}$, donc la suite (v_n) est croissante à partir du rang $n=2$

f) $\begin{cases} u_0=-10 \\ u_{n+1}=u_n+n^2 \end{cases}$ $(n\in\mathbb{N})$ $\rightarrow$ $u_{n+1}-u_n=n^2$ donc $u_{n+1}-u_n>0$: la suite (u_n) est croissante.

Exercice 3 : Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

Pour $n\geq 1$ $u_{n+1}-u_n=\left(2(n+1)^2-3\right)-\left(2n^2-3\right)=2(n+1)^2-3-2n^2+3=2\left[(n+1)^2-n^2\right]$

$u_{n+1}-u_n=2(n+1+n)(n+1-n)=2(2n+1)\times 1=2(2n+1)$

$u_{n+1}-u_n>0$ donc la suite (u_n) est croissante.

Pour $n\geq 1$ $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{1}{5(n+1)}}{\frac{1}{5n}}=\frac{1}{5(n+1)}\times\frac{5n}{1}=\frac{5n}{5(n+1)}=\frac{n}{(n+1)}$

Pour une suite (v_n) est à termes positifs : $n<n+1 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1}<1$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 4 : Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

$u_n=\frac{3n}{5}+1$ pour $n\geq 1$ $\rightarrow u_{n+1}=\frac{3(n+1)}{5}+1=\frac{3n+3}{5}+1$

$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{3n+3}{5}+1\right)-\left(\frac{3n}{5}+1\right)=\frac{3n+3}{5}+1-\frac{3n}{5}-1=\frac{3n+3}{5}-\frac{3n}{5}=\frac{3}{5}$

$u_{n+1}-u_n>0$ donc la suite (u_n) est croissante.

$v_n=\frac{n}{n+1}$ pour $n\geq 1$ $\rightarrow v_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)+1}=\frac{n+1}{n+2}$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)(n+1)}-\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+2)(n+1)}-\frac{n^2+2n}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

$v_{n+1}-v_n>0$ donc la suite (v_n) est croissante.

2ème METHODE : $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}=\frac{n+1}{n+2}\times\frac{n+1}{n}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$: $\frac{v_{n+1}}{v_n}>1$ donc la suite (v_n) est croissante.

$w_n=\left(\frac{7}{9}\right)^n$ pour $n\geq 1$ $\rightarrow w_{n+1}=\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}$

$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}}{\left(\frac{7}{9}\right)^n}=\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1-n}=\frac{7}{9}$: $0<\frac{w_{n+1}}{w_n}<1$ donc la suite (w_n) est décroissante.