

I RAPPELS SUR LES FONCTIONS

1 FONCTION

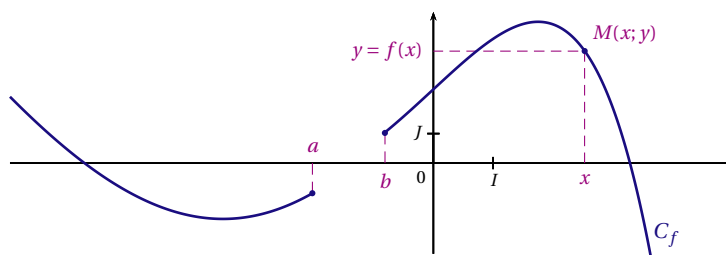
Définir une fonction f sur un ensemble \mathcal{D} de nombres réels, c'est associer à chaque nombre $x \in \mathcal{D}$ un **unique** nombre réel noté $f(x)$. On note :

$$f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

- \mathcal{D} est l'ensemble de définition de la fonction f . x est la variable.
- Le nombre $f(x)$ est l'image du réel x par la fonction f .
- Quand on sait que $f(x) = y$, on dit que x est un antécédent de y par la fonction f .

2 COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit f une fonction définie sur un ensemble \mathcal{D} de nombres réels.
La courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère, est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $\begin{cases} x \in \mathcal{D} \\ y = f(x) \end{cases}$.



C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathcal{D} =]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$

3 VARIATIONS

FONCTION CROISSANTE

Dire que la fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels a et b de I .

$$\text{Si } a \leq b \text{ alors } f(a) \leq f(b)$$

On dit que la fonction f conserve l'ordre : les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans le même ordre.

FONCTION DÉCROISSANTE

Dire que la fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels a et b de I .

$$\text{Si } a \leq b \text{ alors } f(a) \geq f(b)$$

On dit que la fonction f change l'ordre : les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans un ordre contraire.

REMARQUE

On dit que f est *monotone* sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I .

EXTREMUM

- Dire que la fonction f admet un maximum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I , $f(x) \leq f(a)$.
- Dire que la fonction f admet un minimum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I , $f(x) \geq f(a)$.

II FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

1 FONCTION AFFINE

DÉFINITION

Soit a et b deux réels.
La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$ est une fonction affine.

PROPORTIONNALITÉ DES ACCROISSEMENTS

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous nombres réels distincts $x_1 \neq x_2$, on a :

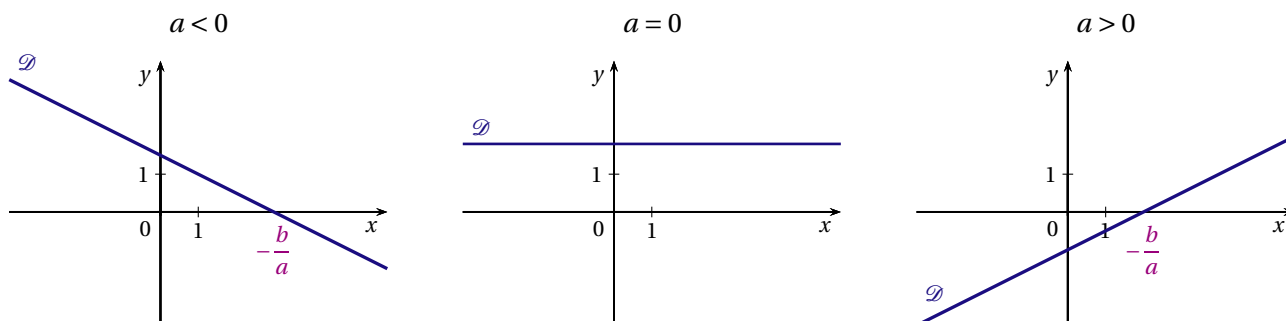
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

VARIATION

- Soit a et b deux réels.
- Si a est positif, la fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$ est croissante.
 - Si a est négatif, la fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$ est décroissante.

COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit a et b deux réels.
La courbe représentative de la fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$ est la droite \mathcal{D} d'équation $y = ax + b$.



2 FONCTION CARRÉ

DÉFINITION

La fonction carré est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$


PROPRIÉTÉS

- Un carré est toujours positif ou nul. Pour tout réel x , on a $x^2 \geq 0$.
- Un nombre et son opposé ont le même carré. Pour tout réel x , on a $x^2 = (-x)^2$.

VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

La fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

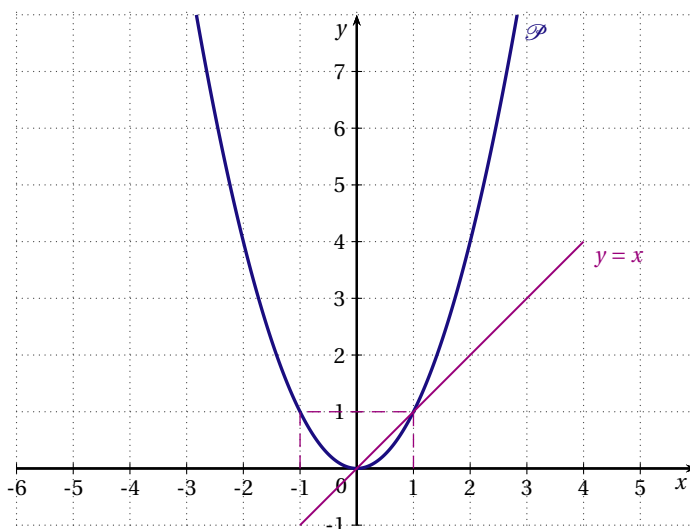
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

CONSÉQUENCES

- Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire. Si $a \leq b \leq 0$ alors $a^2 \geq b^2$
- Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre. Si $0 \leq a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$

COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction carré f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ est la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2$.



REMARQUE :

Si $0 \leq a \leq 1$ alors $a^2 \leq a$. Sur l'intervalle $[0; 1]$, la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2$ est au dessous de la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$.

3 FONCTION INVERSE

DÉFINITION

La fonction inverse est la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

ENSEMBLE DE DÉFINITION

L'ensemble de définition de la fonction inverse est l'ensemble des réels non nuls noté \mathbb{R}^* , c'est la réunion de deux intervalles $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$

VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

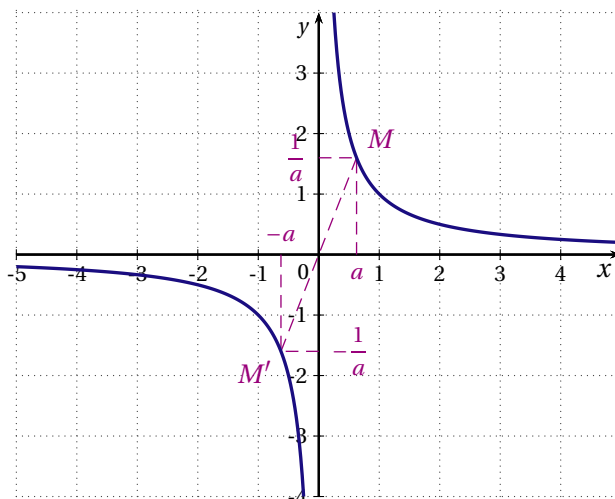
La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘		↘

COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction inverse est l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.



REMARQUES :

— Pour tout réel $a \neq 0$, $f(-a) = -\frac{1}{a} = -f(a)$.

Les points $M(a; f(a))$ et $M'(-a; f(-a))$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

L'hyperbole admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

— On peut rendre $f(x) = \frac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et positif.

On peut rendre $f(x) = \frac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.

Graphiquement, l'hyperbole se rapproche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), et de l'axe des ordonnées lorsque x se rapproche de 0.

On dit que l'hyperbole a pour asymptotes les axes du repère.

4 FONCTION RACINE CARRÉE

DÉFINITION 1

Soit a un réel positif. Le nombre \sqrt{a} est le seul réel positif dont le carré est a .

DÉFINITION 2

La fonction racine carrée est la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

REMARQUE

Il ne faut pas confondre $(\sqrt{x})^2$ et $\sqrt{x^2}$:

— $(\sqrt{x})^2 = x$ seulement pour $x \geq 0$.

— $\begin{cases} \text{Si } x \geq 0, \text{ alors } \sqrt{x^2} = x. \\ \text{Si } x \leq 0, \text{ alors } -x \geq 0, \text{ d'où } \sqrt{x^2} = -x. \end{cases}$

EXEMPLE

$$\sqrt{(-0,5)^2} = \sqrt{0,25} = 0,5$$

VARIATIONS DE LA FONCTION RACINE CARRÉE

La fonction racine carrée définie pour tout réel x positif par $f(x) = \sqrt{x}$ est strictement croissante.

* DÉMONSTRATION

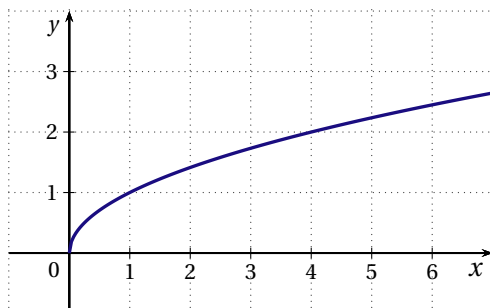
Soit a et b deux réels positifs tels que $0 \leq a < b$:

$$a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

Comme $0 \leq a < b$, alors $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) > 0$. Par conséquent, $a - b$ et $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ sont de même signe.

Ainsi, si $a - b < 0$ alors $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) < 0$ soit $f(a) < f(b)$. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



5 FONCTION CUBE

DÉFINITION

La fonction cube est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^3$.

VARIATIONS DE LA FONCTION CUBE

La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} .

* DÉMONSTRATION

Soit a et b deux réels tels que $a < b$:

— Si $a < 0$ et $b > 0$, alors $a^3 < 0$ et $b^3 > 0$ donc $a^3 < b^3$.

— Si a et b sont de même signe :

Pour tous réel a et b on a

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

a et b étant de même signe, le produit $ab > 0$ d'où $a^2 + ab + b^2 > 0$. Par conséquent, $a^3 - b^3$ est du même signe que $(a - b)$.

Comme $a < b$ on en déduit que $a^3 < b^3$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

