Devoir Surveillé n°2

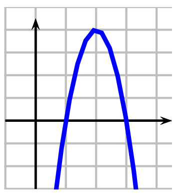
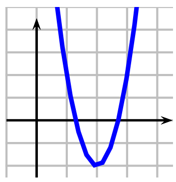
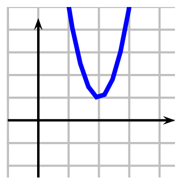
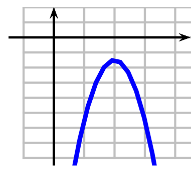
Second degré

Durée 2 heures - Coeff. 8
Noté sur 40 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. QCM — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Une réponse correcte rapporte 1 point. L'absence de réponse ou une réponse fausse ne retire aucun point. Aucune justification n'est demandée.
Recopier sur votre copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1.	Si l'on met l'équation $$5x-3x^2=(1-x)^2$$ sous la forme ax^2+bx+c, alors	$\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} a=4 \\ b=-7 \\ c=1 \end{cases}$	$\begin{cases} a=2 \\ b=7 \\ c=1 \end{cases}$	$\begin{cases} a=2 \\ b=-7 \\ c=1 \end{cases}$
2.	On sait que $\Delta>0$ et $a<0$; alors la parabole d'équation $$y=ax^2+bx+c$$ a pour allure				
3.	L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation $$x^2-4=0$$ est	$\{2\}$	$\{-2\ ;\ 2\}$	$\emptyset$	$\{-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\}$
4.	Le sommet S de la parabole d'équation $$y=x^2+2x+3$$ est	$(-1\ ;\ 2)$	$(1\ ;\ 2)$	$(2\ ;\ 1)$	$(1\ ;\ -2)$
5.	L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'inéquation $$x^2-2x-3=0$$ est	$]-1\ ;\ 3[$	$]-\infty\ ;\ -1[\cup$ $]3\ ;\ +\infty[$	$\emptyset$	$]-\infty\ ;\ 1[\cup$ $]3\ ;\ +\infty[$

Exercice 2. Étude complète — 12 points

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+x+2$.

1. **[1 point]** Déterminer les racines de f sur $\mathbb{R}$.
2. **[1 point]** En déduire l'expression factorisée de f si cela est possible.
3. **[1 point]** Dresser le tableau de signe de $f(x)$.
4. **[1 point]** Résoudre l'inéquation $f(x)>0$.
5. **[1 point]** Dresser le tableau de variation de la fonction f en faisant apparaitre les racines éventuelles dans le tableau.
6. **[1 point]** Construire $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f dans le repère de l'annexe (on fera apparaitre clairement le sommet et les racines).
7. **[1 point]** Résoudre l'équation $x^2+2x-3=0$

8. [3 points] Dresser le tableau de variation de la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 + 2x - 3$$

puis construire sur le même graphique de l'annexe, $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g (on fera apparaitre clairement le sommet et les racines).

9. [3 points] Résoudre graphiquement, puis par le calcul l'inéquation :

$$f(x) \geq g(x)$$

Exercice 3. Équation bicarrée et inéquation — 5 points

1. [2,5 points] Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$(I_1) \quad : \quad \frac{-2x^2 + 4x - 5}{-4x + 3} \geq 0$$

2. [2,5 points] En posant $X = x^2$, résoudre dans $\mathbb{R}$

$$(E_2) \quad : \quad x^4 - 4x^2 - 5 = 0$$

Exercice 4. A la recherche du taux — 5 points

Un capital de 15 000 euros est placé à un taux de $t\%$ puis l'année suivante au taux de $(t+2)\%$. Au bout de deux ans, le capital obtenu est de 17 172 euros.

1. [2 points] Expliquez pourquoi t est solution de l'équation :

$$1,5(100 + t)(102 + t) = 17\,172$$

2. [3 points] Calculer le taux t, arrondi au centième.

Exercice 5. Optimisation de bénéfice — 13 points

Une entreprise fabrique chaque jour x objets avec $x \in [0\ ;\ 60]$.
Le coût total de production de ces objets, exprimé en euros, est donné par $f(x) = x^2 - 20x + 200$.

1. [2 points] Étudier les variations de f sur l'intervalle $x \in [0\ ;\ 60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer $f(0)$ et $f(60)$.

2. [0,5 point] Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 34 euros. Calculer, en fonction de x, la recette $R(x)$.

3. [1 point] Justifier que le bénéfice réalisé pour la production et la vente de x objets est donné , pour $x \in [0\ ;\ 60]$, par

$$g(x) = -x^2 + 54x - 200$$

4. [2 points] Étudier les variations de g sur l'intervalle $x \in [0\ ;\ 60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer $g(0)$ et $g(60)$.

5. [1 point] En déduire la quantité à produire permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal ?

6. [2 points] Résoudre l'inéquation $g(x) \geq 0$.
Déduire de la question précédente les quantités que l'entreprise doit produire et vendre pour que la production soit rentable.

7. [1,5 points] Sur le deuxième graphique de l'annexe, on a tracé $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f.
Construire $\mathscr{C}_R$, la courbe représentative de la fonction recette R et expliquer comment graphiquement retrouver le résultat de la question précédente.

8. [1 point] Retrouver graphiquement le bénéfice maximal. Expliquez votre raisonnement et visualisez ce bénéfice maximal sur le graphique à l'aide de couleur.

9. [2 points] Construire $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g.

- Fin du devoir -

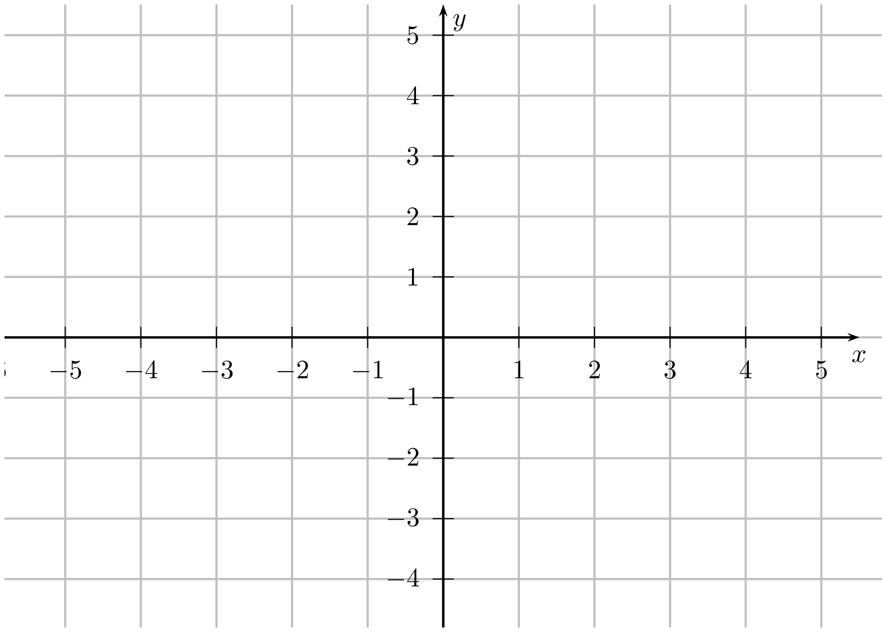
Exercice 6. Bonus * — 3 points

Résoudre l'équation

$$(x+2)^4 - 3(x+2)^2 + 2 = 0$$

Annexe à rendre avec votre copie

Graphique de l'exercice 2



Graphique de l'exercice 5