Devoir Surveillé n°6

Première ES/L

Dérivation et suites

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. Validation des compétences — 5 points

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$.

1. a. Déterminer u_1 et u_2.

1. b. Donner le terme général de la suite (c'est à dire exprimer u_n en fonction de n).

1. c. Calculer u_{25}.

2. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 1,5$.

2. a. Déterminer v_1 et v_2.

2. b. Donner le terme général de la suite (c'est à dire exprimer v_n en fonction de n).

2. c. Calculer v_{25}.

Exercice 2. Retour sur la dérivation — 5 points

On considère la fonction k définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par :

$$k(x) = \frac{1-4x^2}{2-3x^2}$$

1. Montrer que la fonction dérivée de k sur $[1\,;\,+\infty[$ est :

$$k'(x) = \frac{-10x}{\left(2-3x^2\right)^2}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse 1.

3. Déterminer les coordonnées du point de $\mathscr{C}_k$ qui admet une tangente horizontale.

Exercice 3. Un placement — 10 points

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 & = 2\,000 \\ a_{n+1} & = 1{,}02 \times a_n + 300 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n & = a_n + 15\,000 \end{cases}$$

Partie A : Étude générale

1. Déterminer les trois premiers termes des suites (a_n) et (b_n).
2. La suite (a_n) est-elle géométrique ? est-elle arithmétique ?
3. Montrer que la suite (b_n) est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
4. En déduire le terme général de la suite (b_n).
5. Démontrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N} ;\ a_n = 17\,000 \times (1{,}02)^n - 15\,000$$

Partie B : Une application

Un couple fait un placement au taux annuel de 2 % dont les intérêts sont capitalisés tous les ans. Le couple a placé le montant de 2 000 euros à l'ouverture le 1er janvier 2017 puis, tous les ans à chaque 1er janvier, verse 300 euros.
On note a_n le capital présent sur le compte le 1er janvier 2017 + n après le versement annuel. On a donc $a_0 = 2000$.

1. Justifier rapidement que la suite (a_n) de la partie A modélise bien le problème.
2. On suppose que la suite (a_n) est strictement croissante. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels avec la calculatrice l'inégalité :

$$a_n > 5\,000$$

3. Interpréter le résultat de la question précédente dans le cadre de l'exercice.
4. Compléter <u>sur cette feuille</u> les lignes incomplètes de cet algorithme afin qu'il permette de répondre à la question (**2.**).

Pseudo Code

```
Fonction recherche()
    a ← 2000
    n ← 0
    Tant que ..................... Faire
        n ← ......
        a ← ......
    Fin Tant que
    Renvoyer n
```

Fin du devoir