Devoir Surveillé n°8

Première ES/L
Bilan
Durée 3 heures - Coeff. 10
Noté sur 20 points

DEVOIR BILAN
SESSION 2018

Épreuve de :

MATHÉMATIQUES
SÉRIE GÉNÉRALE ES/L

SUJET

Durée de l'épreuve : 3 heures

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5
Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée (*circulaire n^o 99-186 du 16 novembre 1999*)

L'usage du dictionnaire n'est pas autorisé

Le sujet est composé d'exercices indépendants.
Le candidat peut les traiter dans l'ordre qui lui convient.

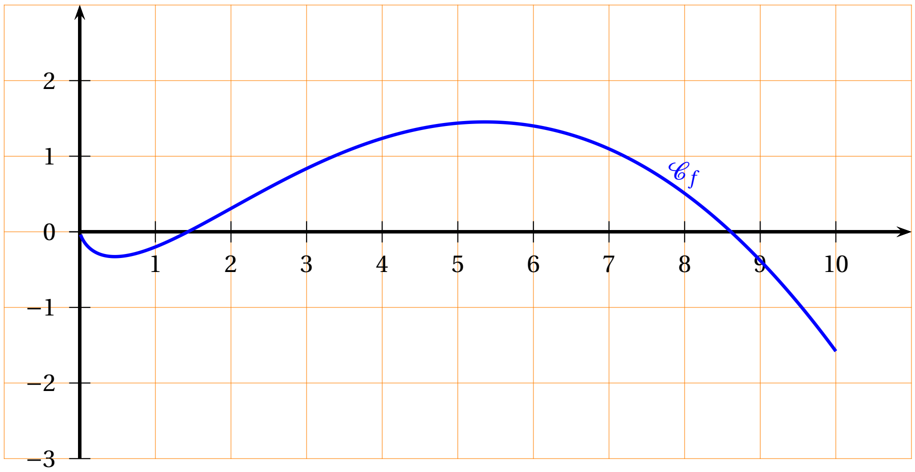
BARÈME (sur 20 points)			
Exercice 1	:	5	points
Exercice 2	:	4	points
Exercice 3	:	6	points
Exercice 4	:	5	points

Exercice 1. QCM 5 points

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O :



On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

Question 1

Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0;10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est égal à :

a. 1 **b.** 2 **c.** 3

Question 2

Le nombre réel $f'(7)$ est :

a. nul **b.** strictement positif **c.** strictement négatif

Question 3

La fonction f' est :

a. croissante sur $]0;10]$ **b.** croissante sur $[4;7]$ **c.** décroissante sur $[4;7]$

Partie B

Question 4

Une grandeur a été augmentée de 5 % la première année, puis de 7 % la deuxième année.
Sur ces deux années, le pourcentage global d'augmentation est égal à :

a. 12 % **b.** 35 % **c.** 0,35 % **d.** 12,35 %

Question 5

Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est de $0,8$. Les tirs sont supposés indépendants.
Quelle est la probabilité qu'il touche 3 fois la cible sur une série de 6 tirs ?

a. 0,512 **b.** 2,4 **c.** 0,262 144 **d.** 0,081 92

Exercice 2. Probabilités 4 points

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir au millième.
À partir d'une étude statistique dans une chaîne de restaurants, on a modélisé le comportement des clients par :

- 60 % des clients sont des hommes ;
- 80 % des hommes mangent un dessert alors que seulement 45 % des femmes en mangent un.

On interroge au hasard un client de cette chaîne. On note :

- H l'évènement « le client interrogé est un homme » ;
- D l'évènement « le client interrogé a mangé un dessert ».

On note également :

- $\overline{A}$ l'évènement contraire d'un évènement A ;
- $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.

Partie A

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un homme et ait mangé un dessert.

3. Montrer que $p(D) = 0,66$. Interpréter ce résultat.

Partie B

On choisit 10 clients au hasard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients déclarant avoir mangé un dessert.
Les résultats seront arrondis au millième.

1. Le nombre de clients étant suffisamment grand, montrer que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi binomiale.

2. Calculer la probabilité de l'évènement : « quatre clients (sur les 10 choisis) ont mangé un dessert. ».

3. Calculer la probabilité de l'évènement : « au moins un client (sur les 10 choisis) a mangé un dessert. ».

Exercice 3. Fonctions **6 points**

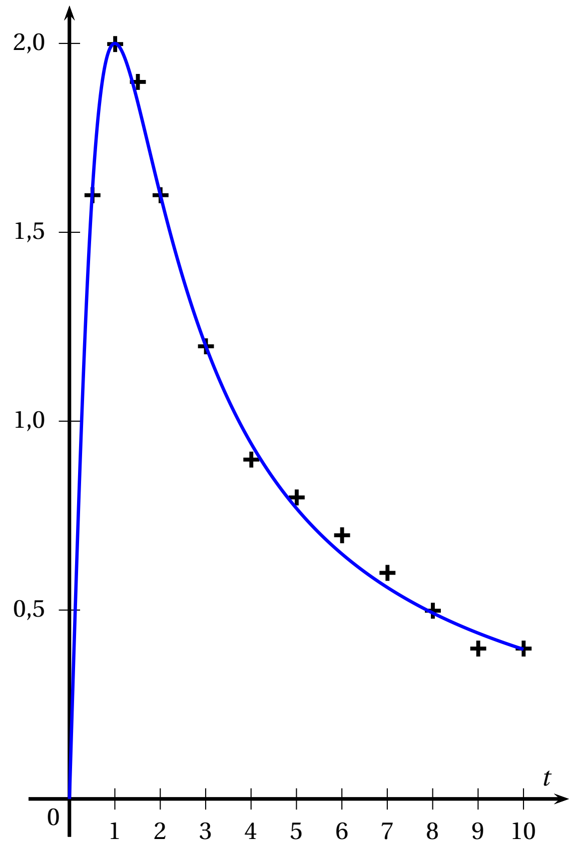
Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.
Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg/l	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$g(t) = \frac{4t}{t^2+1}.$$

Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique. Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.



1. Par lecture graphique donner sans justification :

1. a. les variations de la fonction g sur $[0\,;\,10]$;

1. b. la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures;

1. c. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/l.

2.

2. a. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ et sa dérivée est g'. Montrer que :

$$g'(t) = \frac{4\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$$

2. b. Étudier le signe de g' sur l'intervalle $[0;\,10]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction g sur $[0;\,10]$. On fera apparaitre les valeurs de g aux bornes.

2. c. Montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.

3.

3. a. Résoudre pour t réel l'inéquation :

$$1{,}2t^2 - 4t + 1{,}2 < 0$$

3. b. Application : On définit la CMI (Concentration Minimale Inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier.

La CMI de l'antibiotique injecté est $1{,}2$ mg/l.

Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile c'est-à-dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.

Exercice 4. Suites 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 18.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$.

2. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$.
On précisera la valeur de v_0.

2. b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	$u \leftarrow 65$
ligne 2	$n \leftarrow 0$
ligne 3	Tant que ....
ligne 4	$n \leftarrow n+1$
ligne 5	$u \leftarrow 0,8 \times u + 18$
ligne 6	Fin Tant que

3. a. Recopier et compléter la ligne 3 de cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 85$.

3. b. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ? Expliquer votre démarche avec soin.

4. La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 €par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio.

En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement.

Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :

- d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;
- chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

4. a. Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.

4. b. Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018 ? Justifier la réponse.

4. c. Selon ce modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette ?
Argumenter la réponse (avec la calculatrice).

Fin du devoir