Devoir Surveillé n°9 Correction

Première ES

Bilan de l'année

Durée 2 heures - Coeff. 8

Noté sur 21 points

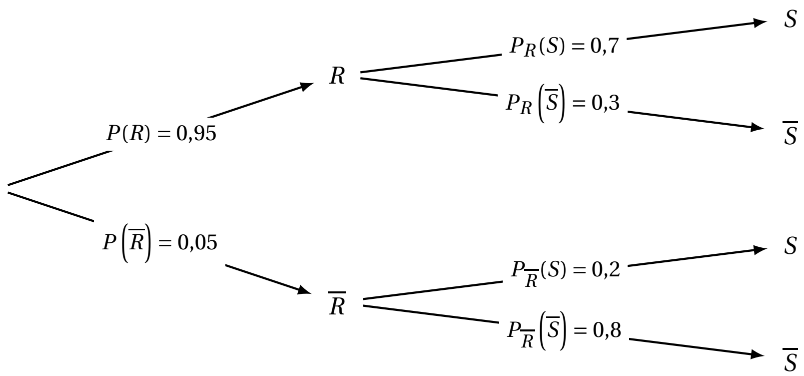
L'usage de la calculatrice <u>est autorisé</u>.

Exercice 1. Probabilités 4 points

Une enquête a été réalisée auprès des élèves inscrits à la demi-pension d'un lycée. Les résultats révèlent que : 95 % des élèves déclarent manger régulièrement à la cantine et parmi ceux-ci 70 % sont satisfaits de la qualité des repas ; 20 % des élèves qui ne mangent pas régulièrement sont satisfaits de la qualité des repas. On choisit un élève au hasard parmi les élèves inscrits à la demi-pension. On note les évènements suivants :

- *R l'évènement : « l'élève mange régulièrement à la cantine » ; S l'évènement : « l'élève est satisfait ».*

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.



2. Calculer la probabilité que l'élève mange régulièrement à la cantine et soit satisfait de la qualité des repas.

On cherche $P(S \cap R)$ qui s'obtient en effectuant le produit des probabilités des branches menant à cet évènement soit :

$$P(S \cap R) = 0,95 \times 0,7 = \underline{0,665}$$

La probabilité que l'élève mange régulièrement à la cantine et soit satisfait de la qualité des repas est $\underline{0,665}$.

3. Montrer que la probabilité de l'évènement S est égale à 0,675.

La probabilité de l'évènement S est :

$$P(S) = P(S \cap R) + P\left(S \cap \overline{R}\right) = 0,665 + 0,2 \times 0,05 = \underline{0,675}$$

4. On choisit 10 élèves au hasard. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves déclarant être satisfaits de la qualité des repas. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale. Les résultats seront arrondis au millième.

4. a. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

Il y a répétition de $n = 10$ événements indépendants et identiques (on tire un élève).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p = 0,675$ quand un élève est satisfait ;
- et échec de probabilité $1 - p = 0,325$ sinon.

Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 10$ épreuves <u>indépendantes</u> de <u>Bernoulli</u> de paramètre $p = 0,675$ suit une <u>loi binomiale</u> de paramètres $\underline{n = 10}$ et $\underline{p = 0,675}$.
On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathscr{B}\left(10\ ;\ 0,675\right) \text{ ou } X \sim \mathscr{B}\left(10\ ;\ 0,675\right).$$

4. b. Calculer la probabilité de l'évènement A : « quatre élèves sont satisfaits de la qualité des repas ».
Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,675$ on a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{10}{k} \times 0,675^k \times (0,325)^{10-k}$$

Et donc

$$p(X=4) = \binom{10}{4} \times 0,675^4 \times 0,325^6$$

Soit arrondi au millième :

$$\boxed{p(X=4) \approx 0.051}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.binomDdP* (10 , 0,675 , 4) ≈ 0,051
> - *Sur TI82/83+ : Menu Distrib ⇒ binomFdp* (10 , 0,675 , 4) ≈ 0,051
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM ⇒ binomialPD* (4 , 10 , 0,675) ≈ 0,051

4. c. Décrire à l'aide d'une phrase l'évènement $\overline{A}$ et calculer sa probabilité.
L'évènement $\overline{A}$ correspond à : « moins de quatre élèves ou plus de quatre élèves sont satisfaits » et l'on a :

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) \approx \underline{0.949}$$

Exercice 2. Intervalle de fluctuation : Les clés USB 2 points

Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique. On prélève au hasard 200 clés dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 200 clés. On admet que la probabilité qu'une clé USB prélevée au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est égale à 0,02. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélèvement. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ *et* $p = 0,2$.

1. Déterminer le plus petit entier a tel que : $P(X \leq a) > 0,025$.
Le plus petit entier a tel que : $P(X \leq a) > 0,025$ est $\underline{a = 29}$ car :

k	$P(X \leq k$
28	$0.0179 < 0,025$
29	$0.0283 > 0,025$

2. Déterminer le plus petit entier b tel que : $P(X \leq b) \geq 0,975$.
Le plus petit entier b tel que : $P(X \leq b) \geq 0,975$ est $b = 51$ car :

50	$0.9655 < 0,975$
51	$0.9764 > 0,975$

3. En déduire un intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence f de clés USB défectueuses dans un échantillon de taille $n = 200$.
La variable X suit une loi binomiale de paramètre $n = 200$ et $p = 0,2$. Un intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence f de clés USB défectueuses dans un échantillon de taille $n = 200$ est donc :

$$I = \left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right] = \left[\frac{29}{200} ; \frac{51}{200}\right] = \underline{[0,145 ; 0,255]}$$

Cela signifie que la fréquence de clés USB défectueuses dans l'échantillon de taille $n = 200$ appartient à cet intervalle avec une probabilités d'au moins 0,95.

Exercice 3. Suites 6 points

Des observations ont établi qu'à la fin de l'été 2010, un glacier de haute montagne possédait un volume de 50 000 m^3. Chaque année, pendant la période hivernale, ce glacier se recharge de 10% de son volume puis perd en moyenne 6 000 m^3 pendant l'été. On modélise la situation par la suite (u_n) définie pour tout entier n par :
$u_0 = 50$; $u_{n+1} = 1,1 \times u_n - 6$, *où u_n désigne le volume du glacier, en milliers de m^3, à la fin de l'été de l'année 2010 + n.*

Partie A

1.

1. a. [0,5 point] Vérifier que le volume du glacier à la fin de l'été de l'année 2011 est de 49 000 m^3.
Le terme u_n désigne le volume du glacier, en milliers de m^3, à la fin de l'été de l'année $2010+n$ donc le volume du glacier à la fin de l'été de l'année 2011 est donné, en milliers de m^3, par :

$$u_1 = 1,1 \times u_0 - 6 = 1,1 \times 50 - 6 = \underline{49}$$

Le volume du glacier à la fin de l'été de l'année 2011 est bien de $\underline{49\,000 \text{ m}^3}$.

1. b. [0,5 point] Calculer u_2.

$$u_2 = 1,1 \times u_1 - 6 = 1,1 \times 49 - 6 = \underline{47,9}$$

Le volume du glacier à la fin de l'été de l'année 2012 est de $\underline{47\,900 \text{ m}^3}$.

2. *On propose l'algorithme suivant* :

INITIALISATION	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 50
TRAITEMENT	Tant que $u \geq 40$ faire
	Affecter à u la valeur $1,1\ u - 6$
	Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin Tant que
SORTIE	Afficher $2010+n$

2. a. [1 point] Donner le résultat affiché par cet algorithme.
Dans l'algorithme :

- la variable u permet de calculer les termes de la suite (u_n) ;
- n correspond à l'indice du terme calculé ;
- La boucle de l'algorithme comporte la condition $u \leq 40$.

On calcule donc les termes de la suite jusqu'à invalider cette condition, c'est à dire jusqu'à obtenir un terme inférieur strictement à 40.
Remarque : L'existence d'un terme invalidant la condition est assurée par le fait que la suite tende vers $-\infty$. Cela n'était pas demandé.
On sort alors l'indice du terme correspondant et on affiche l'année associée. On peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice, on obtient alors arrondi au millième :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10
u_n	50.000	49.000	47.900	46.690	45.359	43.895	42.284	40.513	**38.564**	36.421	34.063
Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	**2018**	2019	2020

On a alors :

$$\begin{cases} u_7 \approx 40,5 > 40 \\ u_8 \approx 38,6 < 40 \end{cases}$$

L'algorithme affiche donc le résultat : $\underline{2010+8=2018}$.

2. b. [0,25 point] Que représente ce nombre dans le contexte de l'exercice ?
Ce nombre correspond à l'année à partir de laquelle le volume du glacier sera inférieur strictement à 40 milliers de m^3. Avec cette modélisation, en 2018, le volume du glacier sera de 38 564 m^3.

Partie B

1. *Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 60$.*

1. a. [2 points] Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 50 \\ u_{n+1} & = 1,1 \times u_n - 6 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 60 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 60 \\ v_{n+1} &= (1,1\ u_n - 6) - 60 \\ v_{n+1} &= 1,1 \times u_n - 66 \\ v_{n+1} &= 1,1 \times \left(u_n + \frac{-66}{1,1}\right) \\ v_{n+1} &= 1,1 \times (u_n - 60) \\ v_{n+1} &= 1,1 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une <u>suite géométrique</u> de raison $q = 1,1$, et de premier terme $v_0 = -10$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 60 \\ v_0 &= 50 - 60 \\ v_0 &= -10 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -10 \\ v_{n+1} & = 1,1 \times v_n \end{cases} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

1. b. [0,75 point] Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = -10 \times 1,1^n + 60$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,1$, et de premier terme $v_0 = -10$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ \underline{v_n = -10 \times (1,1)^n}$$

Or pour tout entier n on a :

$$v_n = u_n - 60 \iff u_n = v_n + 60$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_n = -10 \times (1,1)^n + 60}$$

On admet que la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. [1 point] On considère que ce glacier aura disparu lorsque son volume sera inférieur à 10 000 m^3. Déterminer la date que le modèle laisse prévoir pour la disparition du glacier.

La suite étant décroissante, on va chercher le plus petit entier n tel que $u_n < 10$. On calcule alors les différents termes de la suite et on indique l'indice du premier terme strictement inférieur à 40.

À l'aide de la fonction *Table* de la calculatrice on obtient :

n	8	9	10	11	12	13	14	15	**16**	**17**	18
u_n	38.564	36.421	34.063	31.469	28.616	25.477	22.025	18.228	**14.050**	**9.455**	4.401
Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	**2026**	**2027**	2028

On a :

$$\begin{cases} u_{16} \approx 14,050 > 10 \\ u_{17} \approx 9,455 < 10 \end{cases}$$

Donc la date que le modèle laisse prévoir pour la disparition du glacier est <u>2027</u>.

Exercice 4. Une fonction — 4 points

Soit C la fonction définie pour tout x élément de l'intervalle $]0;10]$ par : $C(x) = 0,2x^3 - 2x^2 + 9x + 6$. La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'articles fabriqués. La courbe représentative de la fonction C, notés $\mathscr{C}_C$ est tracée sur l'annexe à rendre avec votre copie, dans un repère orthogonal. Le prix de vente de chaque article produit est égal à 8,35€.

1. *On note $R(x)$ la recette générée par la production et la vente de x milliers d'articles.*

1. a. Dans le repère précédent, tracer la courbe représentative de la fonction recette.
Le prix de vente de chaque article produit est égal à 8,35€ donc on a :

Articles	1	1 millier	x milliers
Recette	8,35€	8,35 milliers d'euros€	$8,35x$ milliers d'euros

La fonction recette R est donc une fonction affine dont on trace la courbe représentative en calculant une valeur (autre que 1 difficile à placer).

x	0	10
$R(x)$	0	83,5

1. b. Déterminer graphiquement la quantité x que l'entreprise doit produire pour maximiser son profit.
Pour maximiser le profit, l'entreprise doit obtenir un bénéfice maximal. Ce bénéfice maximal correspond à la plus grande différence positive entre les recettes et les coûts. Graphiquement (en vert), cela correspond à une production d'environ 6,5 milliers d'articles.

2. *Le bénéfice est la fonction B définie sur l'intervalle $]0;10]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.*

2. a. Montrer que pour tout réel c de l'intervalle $]0;10]$ on a : $B'(x) = -0,6x^2 + 4x - 0.65$.
Pour tout réel x de $]0;10]$ on a :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 8,35x - (0,2x^3 - 2x^2 + 9x + 6) = \underline{-0,2x^3 + 2x^2 - 0,65x - 6}$$

La fonction B est définie et dérivable sur $]0;10]$ est pour tout x de cet intervalle :

$$B'(x) = 3 \times (-0,2x^2) + 2 \times 2x - 0,65 = \underline{-0,6x^2 + 4x - 0.65}$$

2. b. Étudier les variations de la fonction B.
La fonction B' est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = -0,6 \\ b = 4 \\ c = -0,65 \end{cases} \Longrightarrow \Delta = 14,44 > 0$$

Les deux racines sont alors $x_1 = \dfrac{1}{6}$ et $x_2 = 6,5$ (elles appartiennent bien à l'intervalle de définition). De ce fait B' est du signe de $a = -0,6$ donc négatif à l'extérieur des racines. On obtient donc :

x	0		$\frac{1}{6}$		6.5		10
Signe de $B'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de B	|| -6	↘	≈ -6.05	↗	19.35	↘	-12.5

2. c. En déduire la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal. Quel est le montant en euro de ce bénéfice maximal ?
La production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal est donc $\underline{x_0 = 6,5}$ milliers d'articles, et ce bénéfice maximal est de 19,35 milliers soit 19 350 euros.

Exercice 5. Une fonction 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-4x+7}{x^2+3}$. *On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.*

1. **Montrer que la dérivée de la fonction f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = \dfrac{4\left(x^2-2x-3\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$.** La fonction f est définie et dérivable sur son ensemble de définition. Elle est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = x^2-4x+7$	$u'(x) = (2x-4)$
$v(x) = x^2+3$	$v'(x) = 2x$

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f(x) = \frac{(2x-4)\times\left(x^2+3\right)-\left(x^2-4x+7\right)\times(2x)}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$f(x) = \frac{2x^3+6x-4x^2-12-2x^3+8x^2-14x}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$\underline{\forall x\in\mathbb{R}}\,;\ \boxed{f'(x) = \frac{4\left(x^2-2x-3\right)}{\left(x^2+3\right)^2}}$$

2. **Étudier les variations de la fonction f.**
Le dénominateur de la fonction dérivée est strictement positif sue $\mathbb{R}$ donc f' est du signe du numérateur.
L'expression $\left(1x^2-2x-3\right)$ est une expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 16 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(1x^2-2x-3\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{16}}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+\sqrt{16}}{2} = 3$$

L'expression du second degré est donc du signe de $a=1$ soit positive à l'extérieur des racines, et négative entre. On obtient donc :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	

3. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1. Représenter la tangente T sur le graphique de l'annexe à rendre avec votre copie.**
L'équation de la tangente (T) á la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a=1$ est $(T)\ :\ y = f'(a)(x-a)+f(a)$.
Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} f(1) & =+1 \\ f'(1) & =-1 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{ll} (T)\ : & y=-1\times(x-1)+1 \\ & \underline{y=-x+2} \end{array}$$

Fin du devoir

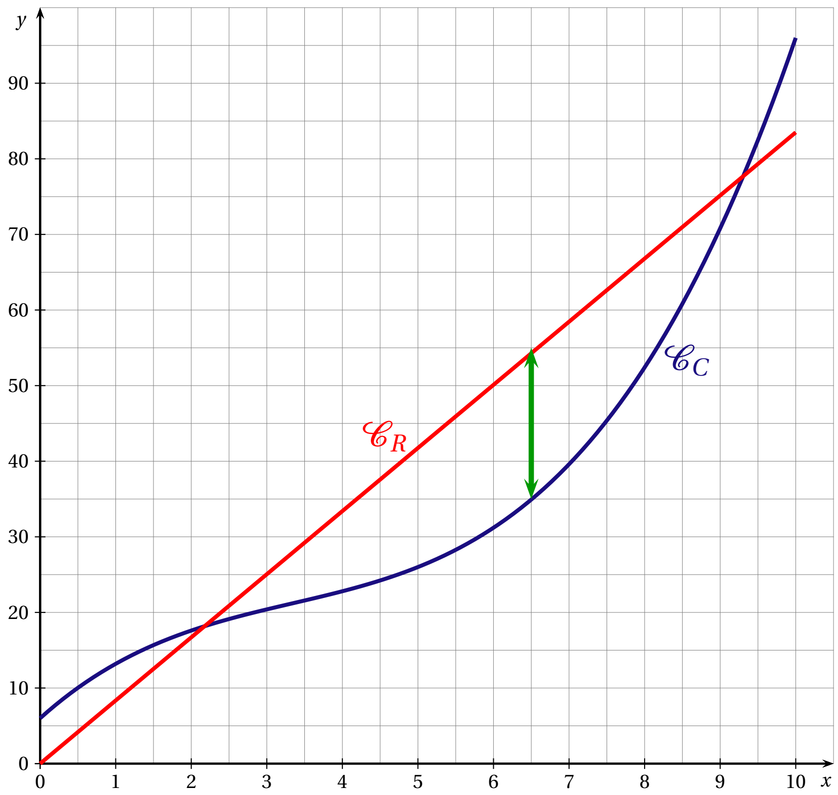
Annexe à rendre avec votre copie

Annexe de l'exercice 4

Soit C la fonction définie pour tout x élément de l'intervalle $]0;10]$ par :

$$C(x) = 0,2x^3 - 2x^2 + 9x + 6$$

La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'articles fabriqués.
La courbe représentative de la fonction C, notés $\mathscr{C}_C$ est tracée ci-dessous :



Annexe de l'exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 + 3}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.