Devoir Surveillé n°5
Correction

Première ES/L
Probabilités
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

Exercice 1. 7 points

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.
Soit le jeu suivant :

- on gagne 10 euros si la face sortie est 1 ou un 2 ; et 5 euros si c'est un 3 ; on perd 90 euro si c'est un 4.

1. **[1 point] Décrire l'univers et l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.**
On définit alors la variable aléatoire X sur Ω qui correspond au gain (ou perte). La v.a. X associe :

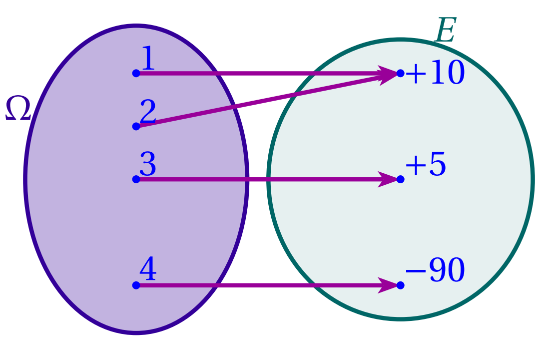
   - 10 à l'issue ou évènement élémentaire $\{1\}$;
   - 10 à l'issue ou évènement élémentaire $\{2\}$;
   - 5 à l'issue ou évènement élémentaire $\{3\}$;
   - et -90 à l'issue ou évènement élémentaire $\{4\}$.

   L'ensemble des valeurs prises par X est donc $F = \{-50\ ;\ 5\ ;\ 10\}$ alors que l'univers est $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$. L'univers associé est alors
$$\Omega = \{e_1 = 1\ ;\ e_2 = 2\ ;\ e_3 = 3\ ;\ e_4 = 4\}$$

2. **[1.5 point] Décrire par une phrase l'évènement « $X = +5$ » et calculer sa probabilité.**

   - L'évènement « $X = +5$ » est l'évènement : « *le joueur a gagné 5 euro* » , il correspond donc à l' évènement élémentaire $\{3\}$.
   - Par ailleurs il y a 3 boules qui portent le n° 3 sur un total de 8 boules. On considérant l'équiprobabilité des tirages on a alors :
$$p(e_3) = \frac{3}{8} = 0,375$$
On a donc :
$$P(X = +5) = \underline{0,375}$$

3. **[2 points] Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X.**



   - Il y a deux boules qui portent le n°1 sur 8, donc en supposant que chaque boule à la même chance d'être tirée on a :
$$p(e_1) = \frac{2}{8} = 0,25$$
On obtient de la même façon :
$$P(e_2) = \frac{2}{8} = 0,25\ ;\ P(e_3) = \frac{3}{8} = 0,375\ ;\ P(e_4) = \frac{1}{8} = 0,125$$

- La loi de probabilité des issues correspondantes est décrite par le tableau :

e_i	1	2	3	4	Total
$P(e_i)$	0,25	0,25	0,375	0,125	1

- La loi de probabilité de X est décrite par le tableau :

x_i	-90	5	10	Total
$P(X = x_i)$	$p(e_4) = 0,125$	$p(e_3) = 0,375$	$p(e_1) + p(e_2) = 0,5$	1

4. [1.5 point] Décrire par une phrase l'évènement « $X \geq +5$ » et calculer sa probabilité.
L'évènement « $X \geq +5$ » est l'évènement : « *le joueur a gagné 5 euro ou plus* » , il correspond donc à l' évènement $\{1 ; 2 ; 3\}$.
La probabilité de l'évènement « $X \geq +5$ » est celle de l' évènement $\{1 ; 2 ; 3\}$ on a donc :

$$P(X \geq +5) = 0,25 + 0,25 + 0,375 = \underline{0,875}$$

5. [1 point] Donner l'espérance de la variable aléatoire X.
Donc l'espérance est :

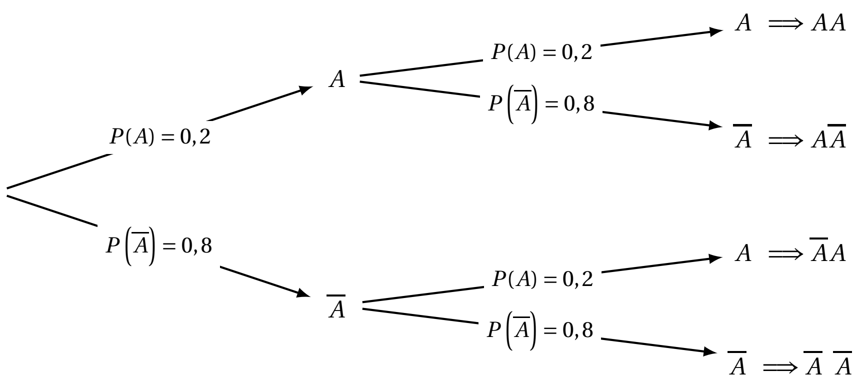
$$\boxed{E(X) = -90 \times 0,125 + 5 \times 0,375 + 10 \times 0,5 = -\underline{4,375}}$$

Cela signifie que le gain moyen au jeu est une perte de 4,375 euros. Le jeu n'est pas équitable et il est préférable de ne pas jouer.

Exercice 2. 5 points

Une agence de sondage interroge des consommateurs sur l'utilisation d'un site internet. On note A l'évènement « la personne interrogée est satisfaite du site ». La probabilité $P(A)$ qu'une personne soit satisfaite du site est de 0,2. On interroge deux consommateurs de façon indépendantes.

1. [1 point] Compléter sur cette feuille l'arbre ci-dessous.
On résume les données dans un arbre pondéré.
On note par exemple AA ou $(A ; A)$ l'évènement : « *la première et la deuxième personne sont satisfaites* »



2. [1 point] Calculer la probabilité qu'ils soient tous deux satisfaits du site.
La probabilité qu'ils soient tous deux satisfaits du site est la probabilité de la liste (ou chemin) AA. D'après le cours, elle est égale au produit des probabilités figurant sur ses branches soit :

$$P(AA) = 0,2 \times 0,2 = \underline{0,04}$$

3. [3 points] Calculer la probabilité qu'au moins un des deux soit satisfaits du site.

- <u>Méthode 1</u>
La probabilité qu'au moins un des deux soit satisfaits du site est celle de l'évènement
$B =$ « $\left\{A\overline{A} ; \overline{A}A ; AA\right\}$ ». On a donc d'après le cours :

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(A\,\overline{A}\right) + P\left(\overline{A}A\right) + P(AA) \\ &= 0,2 \times 0,8 + 0,8 \times 0,2 + 0,04 \\ P(B) &= \underline{0,36} \end{aligned}$$

- <u>Méthode 2</u>
  L'évènement contraire de l'évènement « *au moins un des deux soit satisfaits du site* » est celle de l'évènement « *aucune n'est satisfaite du site* ». On a donc d'après le cours :

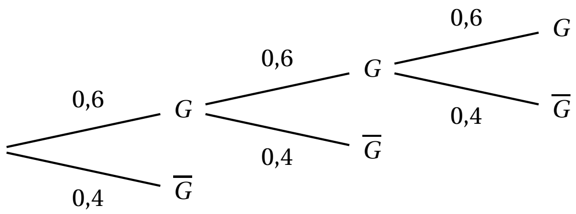
$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P\left(\overline{A}\ \overline{A}\right) \\ &= 1 - 0,8 \times 0,8 \\ P(B) &= \underline{0,36} \end{aligned}$$

Exercice 3. Le tournoi de tennis 5 points

Un tournoi de tennis se déroule par élimination directe. On peut jouer au maximum trois partie (si on va en finale). À chaque rencontre, Roger a une probabilité de gagner égale à 0,6. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées par Roger.

1. [2 points] Montrer que $P(X = 2) = 0,24$.

Soit G l'évènement « *Roger gagne une partie* ». Quand Roger perd une partie, le tournois s'arrête pour lui donc on a :



Puisque X est la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées par Roger, l'évènement « $X = 2$ » correspond à l'évènement $G\,\overline{G}$ puisque pour jouer seulement 2 parties, Roger doit gagner la première et perdre la seconde. On a donc :

$$\boxed{P(X = 2) = P\left(G\,\overline{G}\right) = 0,6 \times 0,4 = \underline{0,24}}$$

2. [2 points] Donner la loi de probabilité de X.

- La variable aléatoire X peut prendre trois valeurs, 1, 2 ou 3 car Roger joue au moins une partie (la première) et au plus 3. On a déjà calculé $P(X = 2) = P\left(G\,\overline{G}\right) = \underline{0,24}$, calculons $P(X = 1)$.
- L'évènement « $X = 1$ » correspond à l'évènement $\overline{G}$ puisque pour jouer seulement 1 partie, Roger doit perdre la première. On a donc :
$$P(X = 1) = P\left(\overline{G}\right) = \underline{0,4}$$
- La somme des probabilités des évènements « $X = x_i$ » pour x_1 prenant les valeurs entières de 1 à 3 faisant 1, on a alors :
$$P(X = 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = \underline{0,36}$$
- On obtient donc :

x_i	1	2	3	Total
$P(X = x_i)$	0,4	0,24	0,36	1

3. [1 point] Calculer son espérance mathématique.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i \times P(X = x_i) \\ &= 1 \times 0,4 + 2 \times 0,24 + 3 \times 0,36 \\ E(X) &= \underline{1,96} \end{aligned}$$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est donc de 1,96. Cela correspond au nombre moyen de parties jouées par Roger.

Exercice 4. Déjà vu ... 3 points

On considère la fonction k définie sur $[1\,;+\infty[$ par $k(x)=\dfrac{1-4x^2}{2-3x^2}$.

1. Montrer que la fonction dérivée de k sur $[1\,;+\infty[$ est :

$$\boxed{k'(x)=\frac{-10x}{\left(2-3x^2\right)^2}}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse 1.

On a : $T_1\ :\ y=k'(1)(x+1)+k(1)$ soit :

$$\left\{\begin{array}{ll} k(1) & =3 \\ k'(1) & =-10 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow T_1\ :\ y=-10(x-1)+3 \ \text{ soit } \boxed{T_0\ :\ y=-10x+13}$$

3. Déterminer les coordonnées du point de $\mathscr{C}_k$ qui admet une tangente horizontale.

Les abscisses des points de $\mathscr{C}_k$ qui admettent une tangente horizontale sont les éventuelles solutions de l'équation $k'(x)=0$ soit :

$$k'(x)=0 \Longleftrightarrow \frac{-10x}{\left(2-3x^2\right)^2}=0 \Longleftrightarrow -10x=0 \Longleftrightarrow x=0$$

L'unique point est donc celui d'abscisse 0 et d'ordonnée $k(0)=\dfrac{1}{2}$ soit :

$$\boxed{A\left(0\,;\frac{1}{2}\right)}$$