Devoir Surveillé n°2. Correction

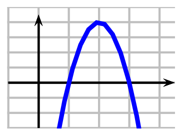
Première ES

Second degré

Durée 2 heures - Coeff. 8

Noté sur 40 points

Exercice 1. QCM — 4 points

		Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
1.	On sait que $\Delta < 0$ et $a < 0$; alors la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a pour allure				
2.	L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation $x^2 + 5 = 5$ est		$\{0\}$		
3.	Le sommet S de la parabole d'équation $y = x^2 + 2x + 3$			$(-1\ ;\ 2)$	
4.	L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'inéquation $x^2 - 2x - 3 < 0$				$]-1\ ;\ 3[$

Exercice 2. Étude complète — 12 points

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + x + 2$$

1. [1.5 point] Déterminer les racines de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est une fonction polynôme du second degré avec : $a = -1$; $b = 1$; $c = 2$. Le discriminant $\Delta = 9 > 0$ donc elle admet deux racines réelles.

$$\Delta = 9 > 0 \Longrightarrow \boxed{\mathscr{S} = \{-1\ ;\ 2\}}$$

2. [0.5 point] En déduire l'expression factorisée de f si cela est possible.

$$\boxed{f(x) = -(x+1)(x-2)}$$

3. [1 point] Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

$\Delta = 9 > 0$ et $a = -1 < 0$, donc le signe de $f(x)$ est donnée par :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. [1 point] Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

L'étude de signe de la question précédente nous donne directement la résolution de l'inéquation :

$$\boxed{f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-1\ ;\ 2[}$$

5. **[1 point] Dresser le tableau de variation de la fonction f en faisant apparaitre les racines éventuelles dans le tableau.**
La fonction f est une fonction polynôme du second degré avec : $a=-1$; $b=1$; $c=2$. Le coefficient $a=-1<0$ étant négatif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un maximum, de coordonnées :

$$S\left(\alpha=\frac{-b}{2a}\ ;\ f(\alpha)\right)\quad ;\quad \boxed{S\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{9}{4}\right)}$$

x	$-\infty$		-1		$\alpha=\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

6. **[1 point] Construire $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f dans le repère de l'annexe (on fera apparaitre clairement le sommet et les racines).**

7. **[3 points] On considère la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^2+3x-10$. Étudier la fonction g (variations, racines et tableau de variations) puis construire sur le même graphique de l'annexe, $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g (on fera apparaitre clairement le sommet et les racines).**

- La fonction g est une fonction polynôme du second degré de la forme ax^2+bx+c avec :

$$\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=-10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Delta=49>0 \\ \alpha=\dfrac{-3}{2} \\ \beta=-12,25 \end{cases}$$

- Le coefficient $a=1>0$ étant positif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un minimum, de coordonnées :

$$S'\left(\alpha=\frac{-b}{2a}\ ;\ g(\alpha)\right)\quad ;\quad \boxed{S'\left(\frac{-3}{2}\ ;\ -12,25\right)}$$

- Les racines de g sont les solutions de l'équation $g(x)=0$.

$$\Delta=49>0 \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x_1=-5 \\ x_2=2 \end{cases}}$$

- On obtient donc le tableau de variations (avec les racines) :

x	$-\infty$		-5		$\alpha=-1.5$		2		$+\infty$
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-12.25	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

8. **[3 points] Résoudre graphiquement, puis par le calcul l'inéquation : $f(x)\geq g(x)$.**
Les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessus de $\mathscr{C}_g$ sont les solutions réelles, si elles existent, de l'inéquation :

$$f(x)\geq g(x) \Leftrightarrow -x^2+x+2\geq x^2+3x-10 \Leftrightarrow -2x^2-2x+12\geq 0$$

Or le trinôme du second degré $-2x^2-2x+12$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=-2$; $b=-2$; $c=12$.

$$\Delta=25>0 \Rightarrow x_1=-3 \text{ et } x_2=2$$

Le signe du trinôme est alors donnée par :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
signe de $-2x^2-x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{f(x)\geq g(x) \Longleftrightarrow x\in[-3\ ;\ 2]}$$

Exercice 3. Équation bicarrée et inéquation — 6 points

1. **[2 points] Étudier sur l'intervalle $[0;10]$ le signe de l'expression : $P(x) = x^2 - 4x - 5$**

La fonction P définie sur $[0;10]$ est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = -5 \end{cases} \Longrightarrow \Delta = 36 > 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \notin [0;10] \\ x_2 = 5 \in [0;10] \end{cases}$$

Le signe de P est donc de celui de $a = 1 > 0$ soit positif à l'extérieur des racines et négatif entre. De ce fait sur $[0;10]$ on obtient :

x	0		5		10
signe de $x^2 - 4x - 5$		$-$	0	$+$	

Donc $P(x)$ est négatif sur $[0;5]$ et positif sur $[5;10]$.

2. **[4 points]En posant $X = x^2$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E_2) : $x^4 - x^2 - 2 = 0$.**

$$(E_2)\ :\ x^4 - x^2 - 2 = 0 \Longleftrightarrow \boxed{x \in \mathscr{S} = \left\{-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\right\}}$$

Exercice 4. A la recherche du taux — 5 points

Un capital de 10 000 euros est placé à un taux de t% puis l'année suivante au taux de $(t+2)$%. Au bout de deux ans, le capital obtenu est de 11 235 euros.

1. **[3 points] Expliquez pourquoi t est solution de l'équation : $t^2 + 202t - 1\,035 = 0$.**

Le coefficient multiplicateur k associé à ces deux évolutions successives est :

$$k = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t+2}{100}\right)$$

On obtient donc l'égalité :

$$\begin{aligned} 10\,000 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t+2}{100}\right) = 11\,235 &\Longleftrightarrow \left(\frac{100+t}{100}\right) \times \left(\frac{t+102}{100}\right) = \frac{11\,235}{10\,000} \\ &\Longleftrightarrow \frac{(100+t) \times (t+102)}{10\,000} = \frac{11\,235}{10\,000} \\ &\Longleftrightarrow (100+t) \times (t+102) = 11\,235 \\ &\Longleftrightarrow 100t + 10\,200 + t^2 + 102t = 11\,235 \\ &\Longleftrightarrow \underline{t^2 + 202t - 1\,035 = 0} \end{aligned}$$

2. **[2 points] Calculer le taux t.**

L'équation $t^2 + 202t - 1\,035 = 0$ est une équation du second degré de la forme $at^2 + bt + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 202 \\ c = -1\,035 \end{cases} \Longrightarrow \Delta = 44\,944 > 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -207 < 0 \\ x_2 = 5 > 0 \end{cases}$$

Le taux du placement étant positif, la seule solution est donc $\underline{t\% = 5\%}$.

Exercice 5. Optimisation de bénéfice — 13 points

Une entreprise fabrique chaque jour x milliers d'objets avec $x \in [0; 60]$. Le coût total de production de ces objets, exprimé en milliers d'euros, est donné par : $C(x) = x^2 - 30x + 300$.

1. [2.5 points] Étudier les variations de C sur $[0; 60]$ et dresser le tableau de variation (avec les images aux bornes).

La fonction C est une fonction polynôme du second degré avec : $a = 1$; $b = -30$; $c = 300$. Le coefficient $a = 1 > 0$ étant positif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un minimum, de coordonnées :

$$S\left(\alpha = \frac{-b}{2a} \text{ ; } C(\alpha)\right) \quad ; \quad \boxed{S(15 \text{ ; } 75)}$$

x	0	$\alpha = 15$	60
Variation de C	$C(0) = 300$ ↘	$C(15) = 75$	↗ $C(60) = 2\,100$

2. [0,5 point] Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 10 euros. Calculer la recette $R(x)$ (en milliers d'euros).

La recette exprimée aussi en milliers d'euros est $\boxed{R(x) = 10x}$.

3. [1 point] Justifier que le bénéfice, exprimé aussi en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers d'objets est donné , pour $x \in [0; 60]$, par : $B(x) = -x^2 + 40x - 300$.

Le bénéfice réalisé pour la production et la vente de x objets est donné, pour $x \in [0 \text{ ; } 60]$, en faisant la différence des recettes et des coûts soit :

$$\boxed{B(x) = 10x - \left(x^2 - 30x + 300\right) = \underline{-x^2 + 40x - 300}}$$

4. [2.5 points] Étudier les variations de B sur $[0; 60]$ et dresser le tableau de variation (avec les images aux bornes).

La fonction B est une fonction polynôme du second degré avec : $a = -1$; $b = 40$; $c = -300$. Le coefficient $a = -1 < 0$ étant négatif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un maximum, de coordonnées :

$$S'\left(\alpha = \frac{-b}{2a} \text{ ; } B(\alpha)\right) \quad ; \quad \boxed{S'(20 \text{ ; } 100)}$$

x	0	10	$\alpha = 20$	30	60
Variation de B	-300 ↗	0	100	0	↘ $-1\,500$

5. [1 point] En déduire la quantité permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice max. ?

la fonction bénéfice B atteint donc un maximum de 100, atteint pour $x = 20$.
De ce fait, le bénéfice maximal est donc de <u>100 000 euros</u>, obtenu pour une production de <u>20 000 objets</u>.

6. [3 points] <u>Inéquation et interprétation</u>.

6. a. Résoudre l'inéquation $B(x) \geq 0$.

$$B(x) \geq 0 \Longleftrightarrow -x^2 + 40x - 300 \geq 0$$

Or le trinôme du second degré $-x^2 + 40x - 300$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$; $b = 40$; $c = -300$.

$$\Delta = 400 > 0 \Longrightarrow x_1 = 10 \text{ et } x_2 = 30$$

Le signe du trinôme est alors donnée par :

x	0		10		30		60
signe de $-x^2 + 40x - 300$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{g(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [10 \text{ ; } 30]}$$

6. b. Déduire de la question précédente les quantités que l'entreprise doit produire et vendre pour que la production soit rentable.

L'entreprise est rentable quand son bénéfice est positif, elle doit donc vendre entre **10 000 et 30 000 objets** pour que la production soit rentable.

7. [1,5 points] Sur le deuxième graphique de l'annexe, on a tracé $\mathscr{C}_C$, la courbe représentative de la fonction C. Construire $\mathscr{C}_R$, la courbe représentative de la fonction recette R et expliquer comment graphiquement retrouver le résultat de la question précédente.

Graphiquement, il suffit de regarder les valeurs de x pour lesquels la droite des recettes est au-dessus de celle des coûts.

8. [1 point] Retrouver graphiquement le bénéfice maximal. Expliquez votre raisonnement et visualisez ce bénéfice maximal sur le graphique à l'aide de couleur.

Ce bénéfice maximal correspond à l'écart maximal entre la droite et la courbe des coûts $\mathscr{C}_f$ entre 10 et 30.

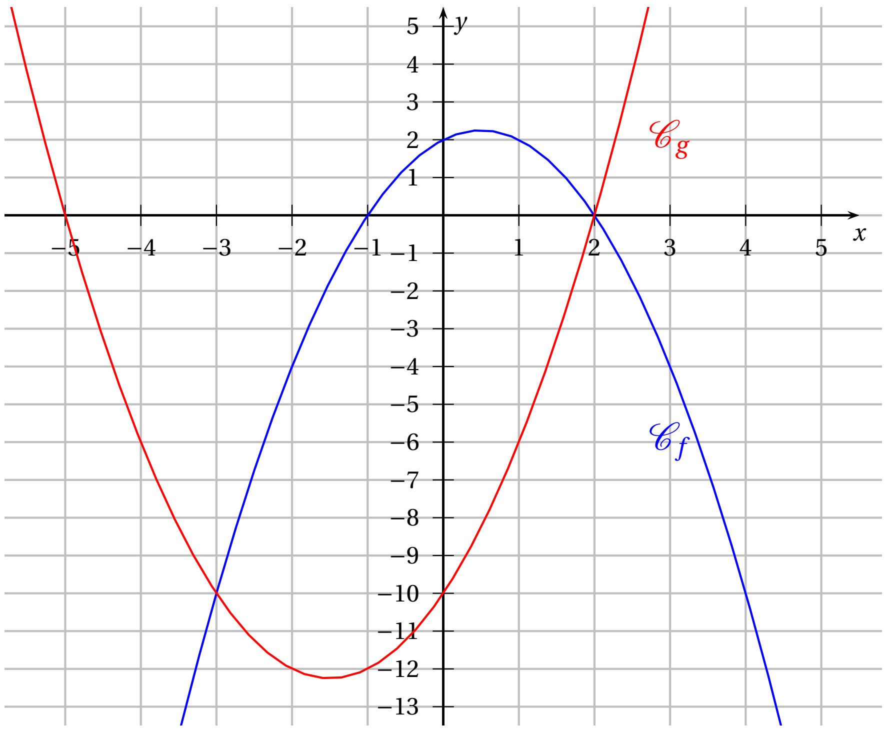
Fin du devoir

Bonus

$$(x+3)^4-3(x+3)^2+2=0 \iff \boxed{x \in \left\{-\sqrt{2}-3\ ;\ -4\ ;\ -2\ ;\ \sqrt{2}-3\right\}}$$

Annexe à rendre avec votre copie

Graphique de l'exercice 2



Graphique de l'exercice 5