

Devoir Surveillé n°2A

Correction

Première ES

Second degré

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20 points

Exercice 1. Équation et inéquation

2 + 4 = 6 points

1. On se place dans un repère orthonormé du plan.

Les abscisses des éventuels points d'intersection de l'axe des abscisse et de la courbe représentative de la fonction f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 17 > 0$$

L'équation admet donc deux solutions réelles qui sont :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{-4} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{-4}$$

Les ordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses sont nulles donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ A \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{4} ; 0 \right) ; B \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{4} ; 0 \right) \right\}$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $(I_1) : \frac{6x^2 - 5x + 1}{-4x + 3} \geq 0$.

- **Valeurs interdites.** Il faut que le dénominateur soit non nul donc que :

$$-4x + 3 \neq 0 \iff x \neq \frac{3}{4}$$

- **Étude de signe du dénominateur.**

On a directement :

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
signe de $-4x + 3$	+	0	-

- **Étude de signe du numérateur.** Le numérateur est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 1 > 0$$

Les deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{12} = \frac{1}{3} \text{ et } x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{12} = \frac{1}{2}$$

Donc $6x^2 - 5x + 1$ est positif (signe de $a = 6$) à l'extérieur des racines et négatif sur $[x_1 ; x_2]$.

• Bilan.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
signe de $-4x + 3$	+	+	+		-
signe de $6x^2 - 5x + 1$	+	0	-	0	+
signe de $\frac{6x^2 - 5x + 1}{-4x + 3}$	+	0	-	0	+

Donc

$$\mathcal{S} = \left] -\infty ; \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{4} \right[$$

Exercice 2. Bénéfice**2.5 + 1.5 = 4 points****1. Résoudre l'inéquation : $(I_2) : -2x^2 + 60x - 250 \geq 0$.**Le trinôme $-2x^2 + 60x - 250$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 60 \\ c = -250 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 1600 > 0$$

Les deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-60 - \sqrt{1600}}{-4} = 25 \text{ et } x_2 = \frac{-60 + \sqrt{1600}}{-4} = 5$$

Donc $-2x^2 + 60x - 250$ est négatif (signe de $a = -2$) à l'extérieur des racines et positif sur $[5 ; 25]$. De ce fait :

$$\mathcal{S} = [5 ; 25]$$

2. Le bénéfice total de fabrication de x milliers de smartphones, exprimé en milliers d'euros (k€), est donné par : $B(x) = 60x - 2x^2$. En utilisant la question 1., déterminer la production permettant de réaliser un bénéfice supérieur à 250 000 euros.

Le problème revient à résoudre l'inéquation :

$$B(x) = 60x - 2x^2 \geq 250 \iff -2x^2 + 60x - 250 \geq 0 \iff x \in [5 ; 25]$$

La production permettant de réaliser un bénéfice supérieur à 250 000 euros est donc comprise entre 5 000 et 25 000 smartphones.

Exercice 3. Étude complète**10 points**

On considère la fonction f , définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. [1.5 point] Déterminer les racines de f sur \mathbb{R} .

f est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 16 > 0$$

Les deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2} = 1$$

2. [1 point] En déduire l'expression factorisée de f si cela est possible.

On a donc :

$$f(x) = (x - 1)(x + 3)$$

3. [1 point] Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

f est du signe de $a = 1 > 0$ à l'extérieur des racines soit :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
signe de $f(x) = x^2 + 2x - 3$	+	0	-	0	+

4. [1 point] En utilisant la question précédente, donner directement les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

On a alors directement :

$$f(x) < 0 \iff x \in]-3; 1[$$

5. [1 point] Dresser le tableau de variation de la fonction f en faisant apparaître les racines éventuelles dans le tableau. On a $a > 0$ donc f est décroissante puis croissante avec $\alpha = \frac{-b}{2a} = -1$:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
g					

6. [2 points] Sur le graphique de l'annexe, on a tracé la courbe représentative de la fonction g , définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = 4 - x^2$$

Construire \mathcal{C}_f , la courbe représentative de la fonction f sur ce même repère (on fera apparaître clairement le sommet et les racines).

7. [2.5 points] Déterminer graphiquement puis par le calcul, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection A et B des courbes représentatives de f et g .

$$f(x) = g(x) \iff x^2 + 2x - 3 = 4 - x^2 \iff 2x^2 + 2x - 7 = 0$$

$2x^2 + 2x - 7 = 0$ est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = -7 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 60 > 0$$

Les deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{60}}{4} \approx -2.44 \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{60}}{4} = 1.44$$

On retrouve bien cela sur le graphique.

- Fin du devoir -

Graphique de l'exercice 3

