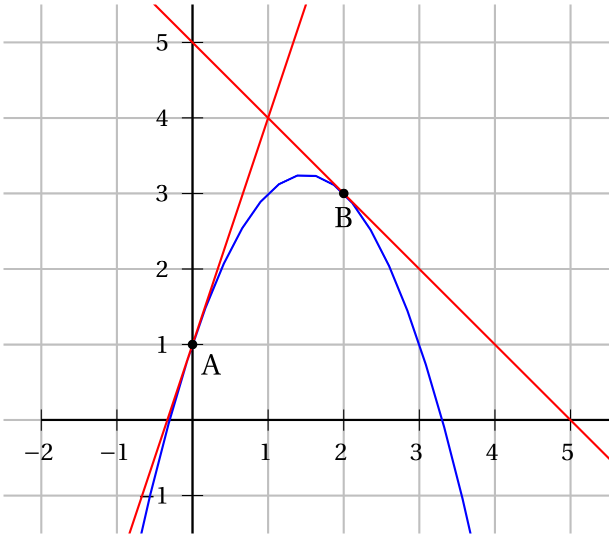
Devoir Surveillé n°5B
Correction

Première ES/L
Dérivation
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

Exercice 1. Lecture graphique puis calculs — 2 points

On a tracé $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives 0 et 2. Lire les nombres dérivés $f'(0)$ et $f'(2)$ et déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B.



1. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(0) = 3$$

2. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A(0\ ;\ 1)$:

$$y = 3x + 1$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(2) = -1$$

4. Équation de T_{-2}, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $B(-2\ ;\ -1)$:

$$y = -x + 5$$

Exercice 2. Le cours : A compléter — 3 points

Ici u et v sont des fonctions dérivables sur I et k est une constante.

I	f de la forme	Dérivée de f
I	$u+v$	$u'+v'$
I	$u\times v$	$u'v+uv'$
v non nul sur I	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
v non nul sur I	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$
I	u^2	$2uu'$
I	$k\times u$	ku'

Donner directement et sans justification la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

I	f définie sur I par :	Dérivée de f
$[2\ ;\ 10]$	$f_1(x) = \dfrac{1}{3} + x^4$	$f_1'(x) = 4x^3$
$[2\ ;\ 10]$	$f_2(x) = \sqrt{x}$	$f_2'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$[2\ ;\ 10]$	$f_3(x) = 5 - \dfrac{x}{3}$	$f_3'(x) = -\dfrac{1}{3}$
$[2\ ;\ 10]$	$f_4(x) = \dfrac{x^2}{2}$	$f_4'(x) = x$
$[2\ ;\ 10]$	$f_5(x) = \dfrac{1}{x}$	$f_5'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$[2\ ;\ 10]$	$f_6(x) = x^2 + 1$	$f_6'(x) = 2x$

Sur votre copie double

Exercice 3. Une histoire de tangentes — 4 points

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x$$

1. Déterminer la fonction dérivée de g sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 6x^2 - 6x - 72$.

2. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente (T_0) á la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $a = 0$ est $(T_0)\ :\ y = g'(a)(x-a) + g(a)$.

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} g(0) & = +0 \\ g'(0) & = -72 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} (T_0)\ : & y = -72 \times (x-0)\ +0 \\ & \underline{y = -72x} \end{array}$$

3. Déterminer, si ils existent, les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ qui admettent une tangente horizontale.

Les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ qui admettent une tangente horizontale sont les solutions de l'équation $g'(x) = 0$.

L'expression $\left(6x^2 - 6x - 72\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 6 \\ b = -6 \\ c = -72 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \Delta = 1764 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(6x^2 - 6x - 72\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{1764}}{12} = -3 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{1764}}{12} = 4 \in \mathbb{R}$$

Les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ qui admettent une tangente horizontale sont donc $\underline{-3 \text{ et } 4}$.

Exercice 4. — 3 points

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$h(x) = \frac{7 - 2x}{1 + 3x}$$

1. Déterminer la fonction dérivée de h sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction h est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = 7 - 2x$	$u'(x) = -2$
$v(x) = 1 + 3x$	$v'(x) = 3$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$h'(x) = \frac{-2 \times (1 + 3x) - (7 - 2x) \times 3}{(1 + 3x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-2 - 6x - (21 - 6x)}{(1 + 3x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-23}{(1 + 3x)^2}$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{-23}{(1 + 3x)^2}}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente (T_0) á la courbe $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse $a = 0$ est $(T_0)\ :\ y = h'(a)(x-a) + h(a)$.

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} h(0) & = +7 \\ h'(0) & = -23 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} (T_0)\ : & y = -23 \times (x-0)\ +7 \\ & \underline{y = -23x + 7} \end{array}$$

Exercice 5. 4 points

On considère la fonction j définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$j(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2 + 3x}$$

1. Montrer que la dérivée de j est sur $[0 ; 10]$: $j'(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 9}{(2+3x)^2}$.

La fonction j est définie et dérivable surl'intervalle $[0 ; 10]$. Elle est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = x^2 - 3x + 1$	$u'(x) = (2x - 3)$
$v(x) = 2 + 3x$	$v'(x) = 3$

Pour tout réel x de $[0 ; 10]$:

$$j(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$
$$j(x) = \frac{(2x-3) \times (2+3x) - \left(x^2 - 3x + 1\right) \times (3)}{(2+3x)^2}$$
$$j(x) = \frac{4x + 6x^2 - 6 - 9x - 3x^2 + 9x - 3}{(2+3x)^2}$$

$$\underline{\forall x \in [0 ; 10]} ; \boxed{j'(x) = \frac{3x^2 + 4x - 9}{(2+3x)^2}}$$

2. Existe-t-il des points de la courbe représentative de la fonction j, qui admettent une tangente horizontale? Si oui, déterminer leurs abscisses.

Les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ qui admettent une tangente horizontale sont les solutions de l'équation $j'(x) = 0$. Or sur son ensemble de définition on a :

$$j'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 + 4x - 9 = 0$$

L'expression $\left(3x^2 + 4x - 9\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 4 \\ c = -9 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \Delta = 124 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(3x^2 + 4x - 9\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{124}}{6} \approx -2.5 \notin [0 ; 10] \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{124}}{6} \approx 1.2 \in [0 ; 10]$$

Il existe donc sur $[0 ; 10]$, un seul point de la courbe qui admette une tangente horizontale, celui d'abscisse x_2.

Exercice 6. — 4 points

On considère la fonction k définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $k(x)=\dfrac{1-5x^2}{3-4x^2}$.

1. Montrer que la fonction dérivée de k sur $[1\,;+\infty[$ est : $k'(x)=\dfrac{-22x}{\left(3-4x^2\right)^2}$.

La fonction k est définie et dérivable surl'intervalle $[1\,;+\infty[$. Elle est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$u(x)=1-5x^2$	$u'(x)=(-10x)$
$v(x)=3-4x^2$	$v'(x)=-8x$

Pour tout réel x de $[1\,;+\infty[$:

$$k(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$k(x)=\frac{(-10x)\times\left(3-4x^2\right)-\left(1-5x^2\right)\times(-8x)}{\left(3-4x^2\right)^2}$$

$$k(x)=\frac{-30x+40x^3+8x-40x^3}{\left(3-4x^2\right)^2}$$

$$\underline{\forall x\in[1\,;+\infty[\,;}\ \boxed{k'(x)=\frac{-22x}{\left(3-4x^2\right)^2}}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse 1.

L'équation de la tangente (T_1) á la courbe $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse $a=1$ est $(T_1)\ :\ y=k'(a)(x-a)+k(a)$.
Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} k(1) & =+4 \\ k'(1) & =-22 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} (T_1)\ : & y=-22\times(x-1)\ +4 \\ & \underline{y=-22x+26} \end{array}$$

3. Existe-t-il des points de la courbe représentative de la fonction k, qui admettent une tangente horizontale? Si oui, l'équation des tangentes.

Les abscisses des points de $\mathscr{C}_k$ qui admettent une tangente horizontale sont les solutions de l'équation $k'(x)=0$. Or sur son ensemble de définition on a :

$$k'(x)=0\iff -22x=0\iff x=0\notin[1\,;+\infty[$$

Il n'y a donc pas de tels points sur $[1\,;+\infty[$.