Devoir Surveillé n°3 Correction

Première ES

Second degré et Statistiques
Durée 1 heure - Coeff. 4
Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. Statistiques — 7 points

Prix	5,85 €	5,9 €	5,95 €	6 €	6,05 €	6,10 €	6,15 €
Nombre de magasins	27	80	98	56	52	29	8
ECC	27	107	205	261	313	342	350

Si besoin, les résultats seront arrondis au centième d'euro.

1. Déterminer la moyenne, la médiane et les quartiles Q1 et Q3 de la série.

- Moyenne :

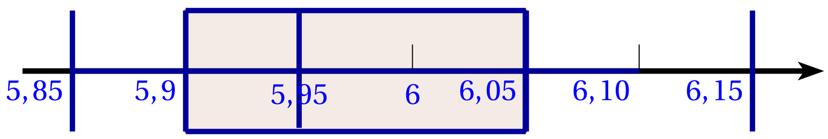
$$\overline{m} = \frac{5,85 \times 27 + \cdots + 6,15 \times 8}{350} = \frac{2089.75}{350} \approx \underline{5.97}$$

- Médiane : il y a 350 valeurs, donc la médiane est toute valeur comprise entre la 175$^{\text{e}}$ et 176$^{\text{e}}$ soit $\underline{Me = 5,95 \text{ €}}$.
- Q1 : il y a 350 valeurs, et $350/4 = 87,5$ donc Q1 sera la 88$^{\text{e}}$ valeur soit $\underline{Q1 = 5,9 \text{ €}}$.
- Q3 : il y a 350 valeurs, et $3 \times 350/4 = 262,5$ donc Q3 sera la 263$^{\text{e}}$ valeur soit $\underline{Q3 = 6,05 \text{ €}}$.

2. Préciser l'étendue et l'écart interquartile.

- L'étendue est la différence entre les valeurs extrêmes soit $e = 6,15 - 5,85 = \underline{0,30 \text{ €}}$.
- L'écart interquartile est la différence entre Q3 et Q1 soit $Q3 - Q1 = \underline{0,15 \text{ €}}$.

3. Construire le diagramme en boite de cette série.



4. Est-il vrai qu'au moins 50% des valeurs de la série sont entre Q1 et Q3 ?
Il y a $80 + 98 + 56 + 52 = 286$ valeurs entre Q1 et Q3 ce qui représente $286/350 \approx 82\%$ des valeurs. L'affirmation est donc vraie.

Exercice 2. Équation bicarrée — 3 points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^4 - 3x^2 - 10 = 0$$

On pose $X = x^2$ et alors :

$$x^4 - 3x^2 - 10 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} X = x^2 \\ X^2 - 3X - 10 = 0 \end{cases}$$

L'expression $\left(X^2 - 3X - 10\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(aX^2 + bX + c\right)$. Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -10 \end{array} \right| \Longrightarrow \Delta = 49 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $X \longmapsto \left(X^2 - 3X - 10\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} = -2 \in \mathbb{R}_- \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2} = 5 \in \mathbb{R}_+$$

- D'une part : l'équation $x^2 = X_1 = -2 < 0$ n'admet pas de solution.
- D'autre part : l'équation $x^2 = X_2 = 5 > 0$ admet deux solutions qui sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.
- Conclusion : Les solution de l'équation bicarrée sont donc : $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

Exercice 3. Application du second degré — 10 points

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 14 milliers d'articles. Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $]0;14]$ par : $C(x) = 0,5x^2 + x + 10,72$. La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathscr{C}_C$, est donnée en annexe ci-dessous. On admet que chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 8,50 €.

1. Est-il plus avantageux pour l'entreprise de fabriquer et vendre 7 000 articles ou de fabriquer et vendre 9 000 articles ?

- Fabriquer et vendre 7 000 articles rapporte :

$$7\,000 \times 8,5 - C(7) \times 1000 = \underline{17\,280€}$$

- Fabriquer et vendre 9 000 articles rapporte :

$$9\,000 \times 8,5 - C(9) \times 1000 = \underline{16\,280€}$$

- Conclusion : il est préférable de fabriquer et vendre 7 000 articles.

2. On désigne par $R(x)$ le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers d'articles. On admet que $R(x) = 8,5x$.

2. a. Tracer dans le repère donné en annexe, la droite $\mathscr{D}$ représentative de la fonction recette.
C'est une fonction linéaire, en tracer la représentation graphique est aisée.

2. b. Par lecture graphique déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.
Par lecture graphique l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif est $[1,5;\ 13,5]$ soit entre 1 500 et 13 500 articles fabriqués et vendus.

3. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $]0;14]$.

3. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;\ 14]$ on a : $B(x) = -0,5x^2 + 7,5x - 10,72$
Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles est obtenu en faisant la différence des recettes et des coûts soit, pour $x \in]0;\ 14]$:

$$B(x) = R(x) - C(x) = 8,5x - (0,5x^2 + x + 10,72) = \underline{-0,5x^2 + 7,5x - 10,72}$$

3. b. Étudier le signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).
L'expression $\left(-0.5x^2 + 7,5x - 10,72\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -0.5 \\ b = 7.5 \\ c = -10.72 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 34.81 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-0.5x^2 + 7,5x - 10,72\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-7.5 - \sqrt{34.81}}{-1} = 13.4 \in]0;\ 14] \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7.5 + \sqrt{34.81}}{-1} = 1.6 \in]0;\ 14]$$

L'expression du second degré est donc du signe de $a = -0,5 < 0$ à l'extérieur des racines et positive ailleurs soit :

x	0		1.6		13.4		14
signe de $B(x)$		−	0	+	0	−	

La plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif) est donc entre 1,6 milliers et 13,4 milliers d'articles soit entre 1 600 et 13 400.

3. c. Étudier les variations de la fonction B sur $]0;14]$. En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?

L'expression $\left(-0.5x^2 + 7{,}5x - 10{,}72\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=-0.5 \\ b=7.5 \\ c=-10.72 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \Delta & =(7.5)^2-4\times(-0.5)\times(-10.72)=34.81>0 \\ \alpha & =\dfrac{-7.5}{2\times(-0.5)}=\dfrac{15}{2} \end{array}\right.$$

Le coefficient $a=-0.5$ étant négatif, la fonction B est croissante sur $]0;7{,}5]$ et décroissante sur $[7{,}5;14]$

x	0	7.5	14
Variations de f	-10.72 ↗	17.405	↘ -3.72

Le bénéfice maximal est donc de 17 405 euros, atteint pour une production de 7 500 articles.

Annexe

Annexe de l'exercice 3