Devoir Surveillé n°8 Correction

Première ES/L

Bilan

Durée 3 heures - Coeff. 10

Noté sur 20 points

DEVOIR BILAN
SESSION 2018

Épreuve de :

MATHÉMATIQUES

SÉRIE GÉNÉRALE ES/L

CORRIGÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Le sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9
Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée (*circulaire n^o 99-186 du 16 novembre 1999*)

L'usage du dictionnaire n'est pas autorisé

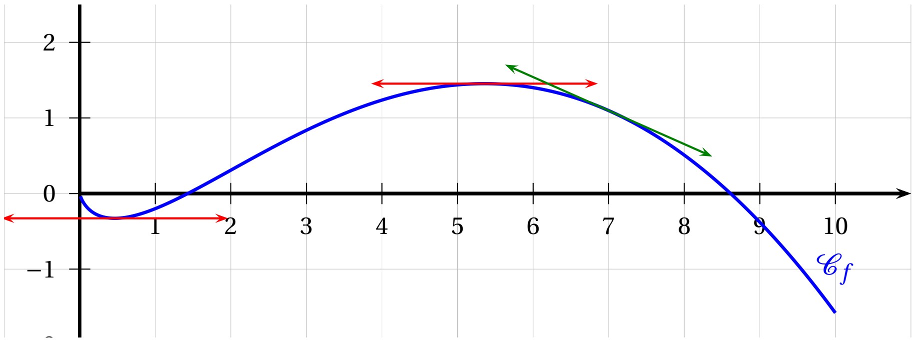
Le sujet est composé d'exercices indépendants.
Le candidat peut les traiter dans l'ordre qui lui convient.

BARÈME (sur 20 points)			
Exercice 1	:	5	points
Exercice 2	:	4	points
Exercice 3	:	6	points
Exercice 4	:	5	points

Exercice 1. QCM 5 points

Partie A

Commun à tous/toutes les candidat/e/s
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Question 1 (Réponse b)

Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0; 10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est égal à :

a. 1 | $\boxed{\textbf{b. } 2}$ | **c.** 3

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Les solutions sur l'intervalle $]0; 10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ sont donc les abscisses des points de la courbe qui admettent une tangente horizontale. Ils sont au nombre de 2 car la courbe semble posséder deux tangentes horizontales sur cet intervalle (en rouge).

Question 2 (Réponse c)

Le nombre réel $f'(7)$ est :

a. nul | **b.** strictement positif | $\boxed{\textbf{c. } \text{strictement négatif}}$

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Le nombre $f'(7)$ est donc négatif car la tangente à la courbe au point d'abscisse 7 semble être de coefficient directeur strictement négatif (en vert).

Question 3 (Réponse c)

La fonction f' est :

a. croissante sur $]0; 10]$ | **b.** croissante sur $[4; 7]$ | $\boxed{\textbf{c. } \text{décroissante sur } [4; 7]}$

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Sur l'intervalle $[4; 7]$, le coefficient directeur des tangentes à la courbe ont des coefficients directeurs de plus en plus petit, donc la fonction f' est bien décroissante sur cet intervalle.

Partie B

Question 4 (Réponse d)

Une grandeur a été augmentée de 5 % la première année, puis de 7 % la deuxième année.
Sur ces deux années, le pourcentage global d'augmentation est égal à :

a. 12 % | **b.** 35 % | **c.** 0,35 % | $\boxed{\textbf{d. } 12{,}35\,\%}$

Preuve.

Propriété 1

Si une quantité Q qui subit une évolution relative (hausse ou baisse) d'un taux de t_1 % suivie d'un autre évolution relative d'un taux de t_2 %,
alors cette quantité Q est multipliée par le coefficient $\left(1+t_1\ \%\right)\times\left(1+t_2\ \%\right)$.

$$Q \xrightarrow{\times\left(1+t_1\ \%\right)} Q\times(1+t_1\ \%) \xrightarrow{\times\left(1+t_2\ \%\right)} Q\times\left(1+t_1\ \%\right)\times\left(1+t_2\ \%\right)$$

Le coefficient multiplicateur associé à ces deux évolutions successives est :

$$k=\left(1+5\ \%\right)\times\left(1+7\ \%\right)=1,1235$$

Cela correspond donc à une augmentation de :

$$t\%=k-1=0,1235=\underline{12,35\%}$$

Question 5 (Réponse d)

Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est de $0,8$. Les tirs sont supposés indépendants.
Quelle est la probabilité qu'il touche 3 fois la cible sur une série de 6 tirs ?

a. 0,512 **b.** 2,4 **c.** 0,262 144 $\boxed{\textbf{d.}\ 0{,}081\,92}$

Preuve.
Comme les tirs sont indépendants, la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de fois où l'archer touche la cible est une loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=0,8$
À l'aide de la calculatrice, on a :

$$P(X=3)=0,08192$$

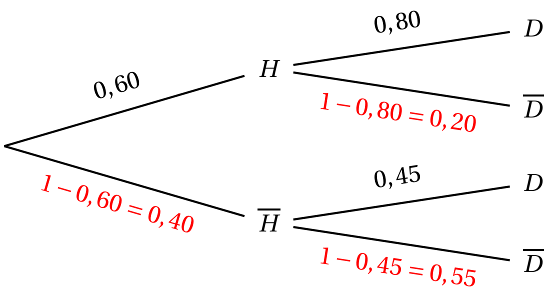
Exercice 2. Probabilités — 4 points

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir au millième. À partir d'une étude statistique dans une chaîne de restaurants, on a modélisé le comportement des clients par :

- *60 % des clients sont des hommes ; 80 % des hommes mangent un dessert alors que seulement 45 % des femmes en mangent un.*
- *On interroge au hasard un client de cette chaîne. On note : H l'évènement « le client interrogé est un homme » ; D l'évènement « le client interrogé a mangé un dessert ».*

Partie A

1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un homme et ait mangé un dessert.
L'événement « être un homme et avoir mangé un dessert » est $H \cap D$.

$$p(H \cap D) = 0,60 \times 0,80 = 0,48$$

3. Montrer que $p(D) = 0,66$.
D'après l'arbre :

$$p(D) = p(H \cap D) + p(\overline{H} \cap D) = 0,48 + 0,40 \times 0,45 = 0,48 + 0,18 = \underline{0,66}$$

Partie B

On choisit 10 clients au hasard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients déclarant avoir mangé un dessert. Les résultats seront arrondis au millième.

1. Le nombre de clients étant suffisamment grand, montrer que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi binomiale.

Il y a répétition de $n = 10$ événements indépendants et identiques (on tire un client).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p = 0,66$ quand un client a mangé un dessert ;
- et échec de probabilité $1 - p = 0,34$ sinon.

Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 10$ épreuves <u>indépendantes</u> de <u>Bernoulli</u> de paramètre $p = 0,66$ suit une <u>loi binomiale</u> de paramètres $\underline{n = 10}$ et $\underline{p = 0,66}$.
On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathscr{B}\left(10\,;\,0,66\right) \text{ ou } X \sim \mathscr{B}\left(10\,;\,0,66\right).$$

2. Calculer la probabilité de l'évènement : « quatre clients (sur les 10 choisis) ont mangé un dessert. ».

Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,66$ on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{10}{k} \times 0,66^k \times (0,34)^{10-k}$$

Et donc

$$p(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,66^4 \times 0,34^6$$

Soit arrondi au millième :

$$\boxed{p(X = 4) \approx 0.062}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.binomDdP* (10 , 0,66 , 4) ≈ 0,062
> - *Sur TI82/83+ : Menu Distrib ⇒ binomFdp* (10 , 0,66 , 4) ≈ 0,062
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM ⇒ binomialPD* (4 , 10 , 0,66) ≈ 0,062

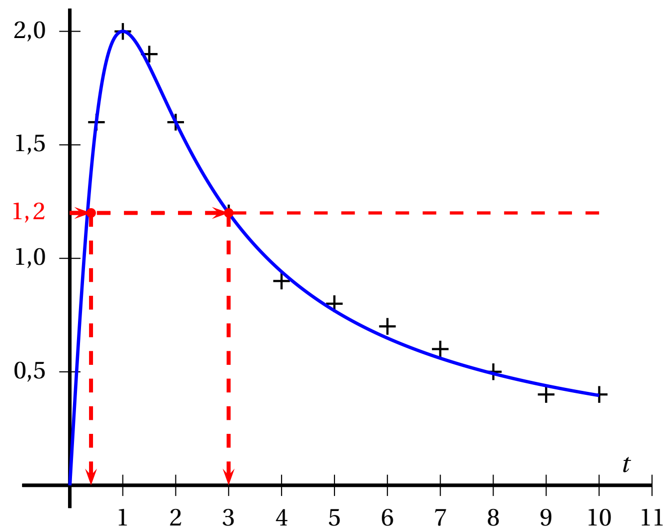
3. Calculer la probabilité de l'évènement : « au moins un client (sur les 10 choisis) a mangé un dessert. ».

On cherche $P(X \geq 1)$ soit en passant à l'évènement contraire et grâce à la calculatrice :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,34^{10} \approx \underline{1}$$

Exercice 3. Fonctions 6 points

Les données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0;\ 10]$ par $g(t) = \dfrac{4t}{t^2+1}$. Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique. Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.



1. Par lecture graphique donner sans justification :

1. a. les variations de la fonction g sur $[0; 10]$;

La fonction semble être croissante sur [0 ; 1] et décroissante sur [1 ; 10].

1. b. la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;

La concentration maximale est de **2 mg/l**.

1. c. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/l.

La concentration semble être supérieure à 1,2 mg/l sur **[0,4 ; 3]**

2.

2. a. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et sa dérivée est g'. Montrer que : $g'(t) = \dfrac{4(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$.

La fonction g est dérivable sur [0 ; 10] et de la forme $\dfrac{u}{v}$:

$$g(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \text{ avec } \begin{cases} u(t) = 4t & ; \quad u'(t) = 4 \\ v(t) = t^2 + 1 & ; \quad v'(t) = 2t \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in [0\ ;\ 10],\ \ g'(t) = \frac{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}{v(t)^2}$$
$$g'(t) = \frac{4\,(t^2+1) - 4t\,2t}{(t^2+1)^2}$$
$$g'(t) = \frac{4\,\left(t^2+1-2t^2\right)}{(t^2+1)^2}$$

$$\boxed{\forall t \in [0\ ;\ 10],\ \ g'(t) = \frac{4\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}}$$

2. b. Étudier le signe de g' sur l'intervalle $[0;10]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction g sur $[0;10]$. On fera apparaitre les valeurs de g aux bornes.

Étudions le signe de $g'(t)$ sur l'intervalle $[0;10]$.
Puisque le dénominateur $\left(t^2+1\right)^2$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$, la dérivée est du signe du numérateur $4\left(1-t^2\right)$, et donc de $\left(1-t^2\right)$.
La fonction $t \longmapsto \left(1-t^2\right)$ est une fonction polynôme du second degré dont les racines sont :

$$\left(1-t^2\right) = 0 \Longleftrightarrow t = 1 \ \text{ ou } \ -1$$

La dérivée est du signe de $a = -1 < 0$ donc négative à l'extérieur des racines et positive ailleurs. Sur l'intervalle $[0;10]$, la fonction g est donc croissante sur $[0\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;\ 10]$.

x	0		1		10
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{40}{101} \approx 0.396$

2. c. Montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.

D'après l'étude précédente, sur l'intervalle $[1\ ;\ 10]$, la fonction g admet un maximum en $x = 1$ qui vaut $g(1) = 2$
La concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection .

3.

3. a. Résoudre pour t réel l'inéquation : $1{,}2t^2 - 4t + 1{,}2 < 0$

La fonction $t \longmapsto 1{,}2t^2 - 4t + 1{,}2$ est une fonction polynôme du second degré de la forme $at^2 + bt + c$ avec $\begin{cases} a = 1{,}2 \\ b = -4 \\ c = 1{,}2 \end{cases}$.

Alors avec $\Delta = 16 - 4 \times 1{,}2 \times 1{,}2 = 10{,}24 > 0$, le polynôme du second degré admet deux racines réelles qui sont :

$$t_1 = \frac{-4 + \sqrt{10{,}24}}{2{,}4} = 3 \ \text{ et } \ t_2 = \frac{-4 - \sqrt{10{,}24}}{2{,}4} = \frac{1}{3}$$

L'expression est donc du signe de $a = 1{,}2 > 0$ soit positive à l'extérieur des racines, et négative entre $\frac{1}{3}$ et 3. De ce fait :

$$\boxed{1{,}2t^2 - 4t + 1{,}2 < 0 \Longleftrightarrow t \in \left]\frac{1}{3}\ ;\ 3\right[}$$

3. b. Application : On définit la CMI (Concentration Minimale Inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier. La CMI de l'antibiotique injecté est 1,2 mg/l. Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile c'est-à-dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.

On cherche à résoudre l'inéquation $g(t) > 1{,}2$ or pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ 10]$:

$$g(t) > 1{,}2 \Longleftrightarrow \frac{4t}{t^2+1} > 1{,}2$$

or puisque $t^2+1>0$ on peut multiplier les deux membres de l'inégalité par t^2+1

$$\begin{aligned} g(t)>1,2 &\Longleftrightarrow 4t>1,2(t^2+1)\\ &\Longleftrightarrow 0>1,2t^2-4t+1,2 \end{aligned}$$

On retrouve alors l'inéquation de la question précédente donc sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ on obtient :

$$\boxed{g(t)>1,2 \Longleftrightarrow t\in\left]\frac{1}{3}\,;\,3\right[}$$

Le temps d'antibiotique utile est donc

$$\boxed{T=t_1-t_2=\frac{8}{3}\text{ h}=2\text{ h}+\frac{2}{3}\text{ h}=2\text{ h }40\text{ min}}$$

Exercice 4. Suites 5 points

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 65$ *et pour tout entier naturel* n *:* $u_{n+1} = 0,8u_n + 18$.

1. **Calculer u_1 et u_2.**

n	0	1	2
u_n	65	$u_1 = 0,8 \times 65 + 18 = 70$	$u_2 = 0,8 \times 70 + 18 = 74$

2. **Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$.**

2. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$. On précisera la valeur de v_0.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 65 \\ u_{n+1} & = 0,8 \times u_n + 18 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - -90 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 90 \\
v_{n+1} &= (0,8\, u_n + 18) - 90 \\
v_{n+1} &= 0,8 \times u_n - 72 \\
v_{n+1} &= 0,8 \times \left(u_n + \frac{-72}{0,8}\right) \\
v_{n+1} &= 0,8 \times (u_n - 90) \\
v_{n+1} &= 0,8 \times v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une <u>suite géométrique</u> de raison $q = 0,8$, et de premier terme $v_0 = -25$ puisque :

$$\begin{aligned}
v_0 &= u_0 - 90 \\
v_0 &= 65 - 90 \\
v_0 &= -25
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -25 \\ v_{n+1} & = 0,8 \times v_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = 90 - 25 \times 0,8^n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$, et de premier terme $v_0 = -25$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; \; v_n = -25 \times (0,8)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 90$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 90$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; \; u_n = -25 \times (0,8)^n + 90}$$

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	$u \leftarrow 65$
ligne 2	$n \leftarrow 0$
ligne 3	Tant que ....
ligne 4	$\quad n \leftarrow n+1$
ligne 5	$\quad u \leftarrow 0,8 \times u + 18$
ligne 6	Fin Tant que

3. a. Recopier et compléter la L3 de cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 85$.

$\boxed{\text{Tant que } u < 85}$.

3. b. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	65.000	70.000	74.000	77.200	79.760	81.808	83.446	84.757	85.806

En utilisant la calculatrice on obtient que la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme est $\underline{n=8}$.

4. *La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de* 52 € *par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio. En juillet 2017,* 65 *particuliers ont souscrit cet abonnement. Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes : • d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ; • chaque mois,* 18 *particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.*

4. a. Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.

- Au mois de juillet, 65 particuliers ont souscrit à l'abonnement donc $u_0 = 65$.
- D'un mois sur l'autre, environ 20% des abonnements sont résiliés et 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.
  Donc le nombre d'abonnés au panier bio le $n+1$-ième mois qui suit le mois de juillet 2017, s'obtient en conservant 80% des u_n abonnés du mois précédent et en en ajoutant 18 soit :
  $$u_{n+1} = 0,8u_n + 18$$
- Conclusion : la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.

4. b. Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018 ? Justifier la réponse.

On cherche à savoir si la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018. Puisque Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 € par mois et que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017, la recette mensuelle est de :

$$52 \times u_n$$

On cherche donc à résoudre, pour n entier entre 6 et 17 (de janvier 2018 pour $n=6$, à décembre 2018 pour $n=17$) l'inéquation :

$$52 \times u_n \geq 4\,420 \text{ €} \iff u_n \geq \frac{4\,420}{52} = 85$$

On reprend alors le résultat obtenu lors de la question (3.)

$$u_n \geq 85 \iff n \geq 8$$

Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va dépasser 4 420 € en <u>mars 2018</u> (pour $n=8$).

4. c. Selon ce modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette ? Argumenter la réponse (avec la calculatrice).

La calculatrice nous donne une idée de la limite en prenant de grandes valeurs. Il semble que la suite tendes vers 90 .

À partir d'un certain nombre de mois, le nombre d'abonnés sera chaque mois proche de 90 ce qui correspond à une recette :

$$90 \times 52\text{€} = 4680\text{€}$$

La recette mensuelle de la société Biocagette tend vers <u>4680 euros</u>.