السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	تحليلية الجداء السلمي حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 : $A(-1,1)$ و $B(-1,3)$ و $C(-4,4)$ و $D(1,1)$ و $E(-4,-2)$

1	لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$ ، $\overrightarrow{AB}(\;0\;;\;2\;)$ و $\overrightarrow{AD}(x_D-x_A\,;y_D-y_A)$ ، $\overrightarrow{AD}(\;2\;;\;0\;)$ منه : $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0\times 2+0\times 2=0+0=0}$ نستنتج إذن أن : $\boxed{(AB)\perp(AD)}$ و أيضا : $\overrightarrow{BC}(x_C-x_B\,;y_C-y_B)$ ، $\overrightarrow{BC}(\;-3\;;\;1\;)$ و $\overrightarrow{DE}(x_E-x_D\,;y_E-y_D)$ ، $\overrightarrow{DE}(\;-5\;;\;-3\;)$ منه : $\boxed{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE}=(-3)\times(-5)+1\times(-3)=15+(-3)=12}$
2	لدينا : $\overrightarrow{CD}(x_D-x_C\,;y_D-y_C)$ ، $\overrightarrow{CD}(\;5\;;\;-3\;)$ و $\overrightarrow{BE}(x_E-x_B\,;y_E-y_B)$ ، $\overrightarrow{BE}(\;-3\;;\;-5\;)$ منه : $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CD}=-3\times5+(-5)\times(-3)=-15+15=0$ بالتالي : $\boxed{(BE)\perp(CD)}$
3	لدينا M منتصف $[DE]$ إذن : $\begin{cases} x_M=\dfrac{x_D+x_E}{2}=\dfrac{-3}{2} \\ y_M=\dfrac{y_D+y_E}{2}=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$ إذن : $\overrightarrow{BC}(x_C-x_B\,;y_C-y_B)$ ، $\overrightarrow{BC}(\;-3\;;\;1\;)$ و $\overrightarrow{AM}(x_M-x_A\,;y_M-y_A)$ ، $\overrightarrow{AM}\left(\dfrac{-1}{2}\;;\;\dfrac{-3}{2}\right)$ منه : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=-3\times\left(\dfrac{-1}{2}\right)+1\times\left(\dfrac{-3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}=0$ بالتالي: $\boxed{(AM)\perp(BC)}$

لإثبات التعامد نبرهن أن الجداء السلمي منعدم.

تمرين 2 : $A(1\,;\,1)$ و $B(1\,;\,3)$ و $C(-1\,;1)$ و $D(0\;;\;1+\sqrt{3})$

1		لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$ ، $\overrightarrow{AB}(\;0\;;\;2\;)$ و $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A\,;y_C-y_A)$ ، $\overrightarrow{AC}(\;-2\;;\;0\;)$ منه : $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\times(-2)+0\times2=0+0=0}$ نستنتج إذن أن : $\boxed{(AB)\perp(AC)}$ بالتالي ABC مثلث قائم الزاوية في A
2	أ)	لدينا $\overrightarrow{CA}(\;2\;;\;0\;)$ و $\overrightarrow{CB}(x_B-x_C\,;y_B-y_C)$ ، $\overrightarrow{CB}(\;2\;;\;2\;)$ و $\overrightarrow{CD}(x_D-x_C\,;y_D-y_C)$ ، $\overrightarrow{CD}(\;1\;;\;\sqrt{3}\;)$ إذن: $\lVert\overrightarrow{CA}\rVert=\sqrt{2^2+0^2}=\sqrt{4}=2$ و $\lVert\overrightarrow{CB}\rVert=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ و $\lVert\overrightarrow{CD}\rVert=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$
	ب)	$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=2\times2+0\times2=4$ و $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=2\times1+0\times\sqrt{3}=2$
3	أ)	$\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\dfrac{\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB}}{\lVert\overrightarrow{CA}\rVert\lVert\overrightarrow{CB}\rVert}=\dfrac{4}{2\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\dfrac{\det(\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB})}{\lVert\overrightarrow{CA}\rVert\lVert\overrightarrow{CB}\rVert}=\dfrac{\begin{vmatrix}2&0\\2&2\end{vmatrix}}{2\times2\sqrt{2}}=\dfrac{4-0}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{\det(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CD}\|}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & \sqrt{3}\end{vmatrix}}{2\times 2}=\frac{2\sqrt{3}-0}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ و $$\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CD}\|}=\frac{2}{2\times 2}=\frac{1}{2}$$

ب) بما أن : $\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن: $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

و بما أن : $\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}$ و $\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن: $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

4 لدينا : $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=-(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

5

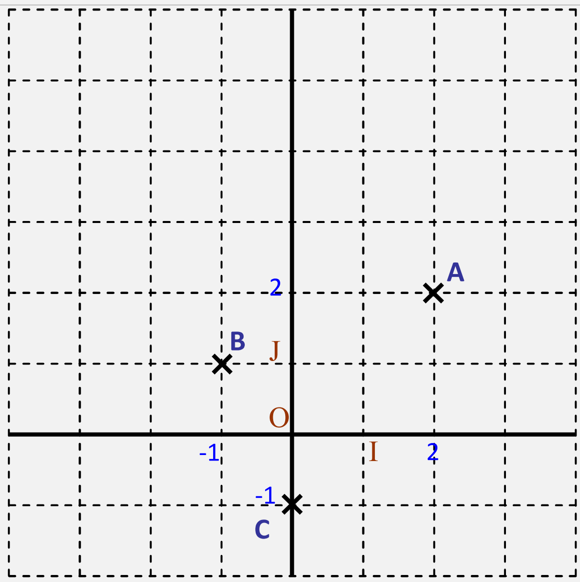
$$Cos\frac{\pi}{12}=Cos(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})=\frac{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CB}\|\|\overrightarrow{CD}\|}=\frac{2\times 1+2\times\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\times 2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$Sin\frac{\pi}{12}=Sin(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})=\frac{\det(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})}{\|\overrightarrow{CB}\|\|\overrightarrow{CD}\|}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & \sqrt{3}\end{vmatrix}}{2\sqrt{2}\times 2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

يمكن تحديد قياس زاوية و ذلك بحساب جيبها و جيب تمامها.

تمرين 3 : $A(2,2)$ و $B(-1,1)$ و $C(0,-1)$

1



2 أ) لنحدد معادلة المستقيم (Δ) المار من B و العمودي على (AC).

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى ، لدينا : $\overrightarrow{BM}(x+1\ ;\ y-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\ ;\ -3)$

$$M\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow-2(x+1)-3(y-1)=0\Leftrightarrow-2x-2-3y+3=0\Leftrightarrow-2x-3y+1=0$$

بالتالي : $\boxed{(\Delta):\ -2x-3y+1=0}$ أو أيضا : $\boxed{(\Delta):\ 2x+3y-1=0}$

ب) لنحدد حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AC)

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى ، لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-2\ ;\ y-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\ ;\ -3)$

$$M\in(AC)\Leftrightarrow\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-2 & y-2\\ -2 & -3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-3(x-2)+2(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow-3x+6+2y-4=0\Leftrightarrow-3x+2y+2=0$$

بالتالي : $\boxed{(AC):\ -3x+2y+2=0}$ أو أيضا : $\boxed{(AC):\ 3x-2y-2=0}$

	ج)	حدد زوج إحداثيتي H نقطة تقاطع (Δ) و (AC) إذن لنحل النظمة المكونة من معادلتي (Δ) و (AC)، أي : $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$ لدينا المحددة هي : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4-9=-13$ و $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2-6=-8$ و $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4-3=1$ ، منه : $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{8}{13}$ و $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-1}{13}$ بالتالي : $\boxed{H\left(\frac{8}{13}\,;\,\frac{-1}{13}\right)}$
	3	لدينا : $\overrightarrow{CA}(\ 2\ ;\ 3\ )$ و $\overrightarrow{CB}(\ -1\ ;\ 2\ )$ إذن: $\left\Vert\overrightarrow{CA}\right\Vert=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ و $\left\Vert\overrightarrow{CB}\right\Vert=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ $\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\left\Vert\overrightarrow{CA}\right\Vert\left\Vert\overrightarrow{CB}\right\Vert}=\frac{-2+6}{\sqrt{13}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{65}}=\frac{4\sqrt{65}}{65}$
	4	لنحدد معادلة ديكارتية للمستقيم (L) واسط القطعة $[AB]$ نعتبر K منتصف $[AB]$ ، إذن : $K\left(\frac{2+(-1)}{2}\,;\,\frac{2+1}{2}\right)$ أي : $K\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى. لدينا : $\overrightarrow{AB}(-3\,;\,-1)$ و $\overrightarrow{KM}\left(x-\frac{1}{2}\,;\,y-\frac{3}{2}\right)$ $M\in(L)\Leftrightarrow\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow-3\left(x-\frac{1}{2}\right)-\left(y-\frac{3}{2}\right)=0\Leftrightarrow-3x+\frac{3}{2}-y+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow-3x-y+3=0$ بالتالي : $\boxed{(L):3x+y-3=0}$
		لإيجاد إحداثيتي نقطة تقاطع مستقيمين نحل النظمة المكونة من معادلتيهما الديكارتيتين لإيجاد معادلة ديكارتية لواسط قطعة نحدد أولا إحداثيتي منتصف هذه القطعة فيكون الواسط مستقيما مارا بهذه النقطة و تكون المتجهة التي طرفاها هما طرفي القطعة منظمية عليه . . . يستحسن جعل معامل x موجبا في معادلة مستقيم وذلك بضرب جميع المعاملات في -1
		<u>تمرين 4</u> : $A\left(1,2\sqrt{3}\right)$ و $B\left(0,\sqrt{3}\right)$ و $C(1,0)$
	1	لدينا : $\overrightarrow{BA}\left(\ 1\ ;\ \sqrt{3}\ \right)$ و $\overrightarrow{BC}\left(\ 1\ ;\ -\sqrt{3}\ \right)$ إذن: $\left\Vert\overrightarrow{BA}\right\Vert=\sqrt{1+3}=2$ و $\left\Vert\overrightarrow{BC}\right\Vert=\sqrt{1+3}=2$ بالتالي : ABC متساوي الساقين في النقطة B
	2	$\boxed{\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left\Vert\overrightarrow{BA}\right\Vert\left\Vert\overrightarrow{BC}\right\Vert}=\frac{1-3}{2\times2}=\frac{-1}{2}}$ و $\sin\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\det\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)}{\left\Vert\overrightarrow{BA}\right\Vert\left\Vert\overrightarrow{BC}\right\Vert}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}}{2\times2}=\frac{-2\sqrt{3}}{4}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ منه: $\boxed{\tan\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\sin\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)}{\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{-1}=\sqrt{3}}$
	3	ليكن (Δ) الارتفاع المنشأ من النقطة B للمثلث ABC إذن (Δ) يمر من B و عمودي على (AC) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى. لدينا : $\overrightarrow{AC}\left(0\,;\,-2\sqrt{3}\right)$ و $\overrightarrow{BM}\left(x\,;\,y-\sqrt{3}\right)$ $M\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow0\times x-2\sqrt{3}\left(y-\sqrt{3}\right)=0\Leftrightarrow-2\sqrt{3}\left(y-\sqrt{3}\right)=0\Leftrightarrow y-\sqrt{3}=0$ بالتالي : $\boxed{(\Delta):\ y-\sqrt{3}=0}$
	4	ليكن E منتصف $[AB]$ ، إذن المتوسط المار من النقطة C للمثلث ABC هو المستقيم (EC)

لنحدد إذن لنحدد حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (EC)، لدينا : $E\left(\frac{1}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى، لدينا : $\overrightarrow{CM}(x-1;\ y)$ و $\overrightarrow{EC}\left(\frac{1}{2};-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$M\in(EC)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{EC}\right)=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y \\ \frac{1}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-1)+\frac{1}{2}y=0$$

$$\Leftrightarrow -3\sqrt{3}(x-1)+y=0\Leftrightarrow -3\sqrt{3}\,x+y-3\sqrt{3}=0$$

بالتالي : $\boxed{(EC):\ 3\sqrt{3}\,x-y+3\sqrt{3}=0}$

5

لنحدد إحداثيتي G مركز ثقل المثلث ABC، نعلم أن : $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{2}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\sqrt{3}\end{cases}$ منه: $\boxed{G\left(\frac{2}{3};\sqrt{3}\right)}$

6

مساحة المثلث ABC هي: $S_{ABC}=\dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|}{2}$ ولدينا : $\overrightarrow{AB}\left(-1;-\sqrt{3}\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(0;-2\sqrt{3}\right)$

منه: $\boxed{S_{ABC}=\dfrac{\left|\begin{vmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ 0 & -2\sqrt{3}\end{vmatrix}\right|}{2}=\dfrac{\left|2\sqrt{3}\right|}{2}=\sqrt{3}}$

7

أ) لنحدد معادلة ديكارتية للمستقيم (BC)، لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى.

لدينا : $\overrightarrow{CM}(x-1;\ y)$ و $\overrightarrow{BC}\left(1;-\sqrt{3}\right)$

$$M\in(BC)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{BC}\right)=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y \\ 1 & -\sqrt{3}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -\sqrt{3}(x-1)-y=0\Leftrightarrow -\sqrt{3}\,x-y+\sqrt{3}=0$$

بالتالي : $\boxed{(BC):\ \sqrt{3}\,x+y-\sqrt{3}=0}$

ب) $\boxed{d(A;(BC))=\dfrac{\left|\sqrt{3}x_A+y_A-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}}=\dfrac{\left|\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right|}{2}=\sqrt{3}}$

للتذكير ارتفاع مثلث هو مستقيم يمر من أحد رؤوسه و عمودي على حامل الضلع المقابل لهذا الرأس، أما المتوسط فهو مستقيم يمر من أحد رؤوسه و منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.