تمارين محلولة:المنطق

المستوى : الأولى باك علوم تجريبية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1:

1)أنقل الجدول التالي ثم ضع العلامة "x" في الخانة المناسبة .

	صحيح	خاطئ
كل زوجي قابل للقسمة على 4		
مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي		
$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$		
اذا كان n عددا فرديا فان n^2 عدد فردي		
المعادلة : $x^2=-1$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$		
جميع المستقيمات المتعامدة في الفضاء متقاطعة		
114516مضاعف للعدد4		
$\left((-2)^2=-4\right)$		

2)هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد ؟

الأجوبة:(1)

	صحيح	خاطئ
كل زوجي قابل للقسمة على 4		x
مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي	x	
$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$		x
اذا كان n عددا فرديا فان n^2 عدد فردي	x	
المعادلة : $x^2=-1$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$		x
جميع المستقيمات المتعامدة في الفضاء متقاطعة		x
114516مضاعف للعدد4	x	
$\left((-2)^2=-4\right)$		x

2) كل النصوص الرياضيةاما صحيحة و إما خاطئة وتسمى عبارات
وجدول حقيقة عبارة

p
1
0

تمرين2:

حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية:

- $p\ \left((-2)^2=4\right)$
- $q\ \ \sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

الأجوبة:

p عبارة صحيحة : $\overline{p}\ :\ \left((-2)^2\neq 4\right)$

qعبارة خاطئة : $\overline{q}\ :\ \left(\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\right)$

تمرين3:

حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$p\ \left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ و $\left((-2)^2=4\right)$

$q\ \ \frac{1}{2}\in\mathbb{N}$ و $\left(\frac{7}{2}>3\right)$

الأجوبة:

نستعمل جدول حقيقة العطف المنطقي
العبارة p مكونة من عبارتين صحيحتين اذن هي عبارة صحيحة أنظر جدول عملية العطف المنطقي:

p	q	p و q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

تمرين4:

حدد قيمة حقيقة العبارات الآتية :

$A\ \left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ و $\left((-2)^2>3\right)$

$B\ \ \sqrt{2}\in Q$ و $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}>3\right)$

$C\ "\left(\sqrt{2}\leq 1\right)$ و$\left(\pi=3.14\right))"$

الأجوبة:

نستعمل جدول عملية العطف المنطقي لتحديد قيمة الحقيقة

Aعبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارتين صحيحتين

Bعبارة خاطئة : لأنها عطف عبارة صحيحة مع خاطئة

Cعبارة خاطئة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

تمرين5:

حدد قيمة الحقيقة و العبارة النافية لكل عبارة من العبارات الآتية :

$A\ \left(\frac{5}{2}\geq 1\right)$ أو $\left((-2)^2=-4\right)$

$B\ \ \left(-3\in\mathbb{N}\right)$ أو $\left(5<3\right)$

الأجوبة:

نستعمل جدول حقيقة الفصل المنطقي

Aعبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارة صحيحة و عبارة خاطئة

Bعبارة خاطئة: لأنها فصل عبارتين خاطئتين

p	q	p أو q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$\overline{A}\ \left(\frac{5}{2}<1\right)$ و $\left((-2)^2\neq -4\right)$

$\overline{B}\ \ \left(-3\notin\mathbb{N}\right)$ و $\left(5\geq 3\right)$

تمرين6: حدد قيمة الحقيقة و العبارة النافية لكل عبارة من العبارات الآتية :

A $\left(\sqrt{4}=2\right)$ أو $\left(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\right)$

B $\left((-2)^2>3\right)$ أو (3عدد فردي)

C $\left(\sqrt{2}\le 1\right)$ أو $\left(\pi=3.14\right)$

الأجوبة: نستعمل جدول حقيقة الفصل المنطقي

A عبارة صحيحة : لأن $\left(\sqrt{4}=2\right)$ عبارة صحيحة

B عبارة صحيحة : لأنها فصل عبارتين صحيحتين

C عبارة خاطئة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

$\overline{A}$ $\left(\sqrt{4}\ne 2\right)$ و $\left(\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}\right)$

$\overline{B}$ $\left((-2)^2\le 3\right)$ و (3عدد زوجي)

$\overline{C}$ $\left(\sqrt{2}>1\right)$ و $\left(\pi\ne 3.14\right)$

تمرين7: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

A (2عدد فردي) $\Rightarrow$ $\left(0,1\in\mathbb{N}\right)$

B (4عدد زوجي) $\Rightarrow$ $\left(-1\in\mathbb{N}\right)$

الأجوبة: نستعمل جدول حقيقة الاستلزام المنطقي

A عبارة صحيحة

B عبارة خاطئة

p	q	$p\Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

تمرين8: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

p $\left(\sqrt{3}\ge 1\right) \Rightarrow \left((-2)^2=-4\right)$

q $\left(\frac{6}{2}=2\right)\Rightarrow\left(\sqrt{5}<3\right)$

الأجوبة: نستعمل جدول حقيقة العطف المنطقي

p **عبارة خاطئة :**

لأن $\left(\sqrt{3}\ge 1\right)$ صحيحة

و $\left((-2)^2=-4\right)$ خاطئة

q **عبارة صحيحة** :لأن $\left(\frac{6}{2}=2\right)$ خاطئة و $\left(\sqrt{5}<3\right)$ صحيحة

تمرين9: 1)أتمم ملأ الجدول التالي :

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p}$ أو q	$(p\Rightarrow q)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

2) ماذا تلاحظ؟

الأجوبة:

1)

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p}$ أو q	$(p\Rightarrow q)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

2)ألاحظ أن العبارتان $(p\Rightarrow q)$ و $\overline{p}$ أو q متكافئتان

تمرين10:

حدد نفي العبارة الآتية : A" $x^2=9\Rightarrow x=3$ أو $x=-3$"

الجواب: $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow$ $\overline{p}$ أو q

ومنه نفي $(p\Rightarrow q)$ هي العبارة P و $\overline{q}$

ومنه $\overline{A}$" $x^2=9$ و $(x\ne 3$ و $x\ne -3)$"

تمرين11: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

p $\left(2\sqrt{3}\ge\sqrt{10}\right)\Leftrightarrow\left(\left(5\sqrt{2}\right)^2=50\right)$

q $-6\in\mathbb{N}\Leftrightarrow(1\ge 3)$

الأجوبة: نستعمل جدول حقيقة التكافؤ المنطقي

p عبارة صحيحة :

لأن $\left(2\sqrt{3}\ge\sqrt{10}\right)$ و $\left(\left(5\sqrt{2}\right)^2=50\right)$ صحيحتين معا

q عبارة صحيحة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

p	q	$p\Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

تمرين12: نعتبر التعبير التالي :

$(x\in\mathbb{R});x^2-x\ge 0$

1)حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=2$

2)حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=\frac{1}{2}$

3)حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=-1$

4) هل التعبير صحيح أم خاطئ؟

الأجوبة: 1)من أجل $x=2$ نجد : $2\ge 0$

ومنه نحصل على عبارة صحيحة

2)من أجل $x=\frac{1}{2}$ نجد : $-\frac{1}{4}\ge 0$

ومنه نحصل على عبارة خاطئة

3)من أجل $x=-1$ نجد : $2\ge 0$

ومنه نحصل على عبارة صحيحة

4) التعبير: $(x\in R);x^2-x\ge 0$ يصبح صحيحا

من أجل بعض قيم x من $\mathbb{R}$ خاطئا من أجل بعض قيم x

نقول أننا أمام دالة عبارية تحتوي على متغير x

ينتمي إلى المجموعة $\mathbb{R}$ ونكتب : $\exists x\in\mathbb{R}/x^2-x\ge 0$

ونقرأ يوجد x من $\mathbb{R}$ بحيث $x^2-x\ge 0$

تمرين13: نعتبر التعبير التالي : $(n\in\mathbb{N});n^2\ge 0$

1)حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $n=2$

2)هل توجد قيم n ل : لا تحقق التعبير السابق؟

الأجوبة: 1)من أجل $n=2$ نحصل :على عبارة صحيحة

2)نلاحظ أننا نحصل على عبارة صحيحة مهما تكن قيمة المتغير n

نكتب : $\forall n\in\mathbb{N}/n^2\ge 0$

تمرين14: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$A\ "(\forall x\in\mathbb{R});\ x^2>0"$

$B\ "(\forall n\in\mathbb{N});\ 2^n>5(n+1)"$

$C\ "\ \exists x\in\mathbb{N},\ 2x-1=0\ "$

$D\ "(\forall n\in\mathbb{N});\ \frac{n}{4}\notin\mathbb{N}"$

$E\ "\ n>4\ \Rightarrow\ n>2"$

الأجوبة: A عبارة خاطئة : لأن 0 لا يحقق: $(x^2>0)$

B عبارة خاطئة : لأن 0 لا يحقق: $\left(2^n>5(n+1)\right)$

لأن $\left(2^0<5(0+1)\right)$

C عبارة خاطئة : لأن $\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$

D عبارة خاطئة : لأن $\frac{4}{4}\in\mathbb{N}$

E عبارة خاطئة

تمرين15: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1. $"\forall x\in\mathbb{R}/x^2>0"$
2. $"\ \exists x\in\mathbb{R},\ x^2-2=0\ "$
3. $"\ \exists x\in\mathbb{R},\ x^2+1=0\ \Leftrightarrow$ 5عدد فردي "
4. $"\ (2<\sqrt{3})\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}"$
5. $(\forall x\in\mathbb{R});-1\leq\cos x\leq 1$
6. $(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n<m$
7. $(\exists n\in\mathbb{N})$ $2n+1$ عدد زوجي
8. $(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$
9. $(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y-x>0$
10. $(\exists! x\in\mathbb{R});2x+4=0$
11. $(\exists! x\in\mathbb{R});x^2=2$
12. $(\exists x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$
13. $(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y^2=x$

الأجوبة :1) خاطئة 2) صحيحة 3) خاطئة 4) خاطئة 5) صحيحة 6) صحيحة 7) خاطئة 8) خاطئة 9) صحيحة 10) صحيحة 11) خاطئة 12) صحيحة 13) خاطئة نأخذ $x=-1$

تمرين16: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية :

1) $(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$

2) $(\exists x\in\mathbb{Z}):\frac{x}{4}\in\mathbb{Q}$ و $x^2-2=0$

3) كل الأشجار غير مثمرة في المؤسسة

الأجوبة: 1) $(\exists n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\notin\mathbb{N}$

2) $(\forall x\in\mathbb{Z}):\frac{x}{4}\notin\mathbb{Q}$ أو $x^2-2\neq 0$

3) توجد شجرة مثمرة في المؤسسة

تمرين17: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية :1) $(\forall n\in\mathbb{N});2^n\succ 5(n+1)$

2) $"\exists x\in\mathbb{R},\ x^2-2=0$ و $-\frac{3}{2}\in\mathbb{Q}\ "$

3) $(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n<m$ 4) كل مثلث قائم الزاوية له زاوية حادة

5) توجد نافذة في المؤسسة مكسورة 6) $(\forall n\in\mathbb{Z}):n\in\mathbb{Z}\Rightarrow n\geq 0$

الأجوبة : 1) $(\exists n\in\mathbb{N}):2^n\leq 5(n+1)$

2) $(\forall x\in\mathbb{R}):x^2-2\neq 0$ أو $-\frac{3}{2}\notin\mathbb{Q}$

3) $(\exists n\in\mathbb{N});(\forall m\in\mathbb{N}):n\geq m$

4) يوجد مثلث قائم الزاوية له زاوية غير حادة

5) كل نوافذ المؤسسة غير مكسورة 6) $(\exists n\in\mathbb{Z}):n\in\mathbb{Z}$ و $n<0$

تمرين18: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية:

1) $P;(\forall x\in\mathbb{R}):x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$

2) $Q;(\exists x\in\mathbb{R}):x<2\Rightarrow x^2\geq 2015$

الأجوبة: 1) $\overline{P};(\exists x\in\mathbb{R}):x\neq 2$ و $x^2=4$

2) $\overline{Q};(\forall x\in\mathbb{R}):x<2$ و $x^2<2015$

تمرين19: ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $\sqrt{2}<x<5\Rightarrow 3<x^2+1<26$

الأجوبة: نفترض أن : $\sqrt{2}<x<5$ ونبين أن : $3<x^2+1<26$

لدينا : $\sqrt{2}<x<5$ اذن : $2<x^2<25$ اذن : $3<x^2+1<26$

ومنه : $\sqrt{2}<x<5\Rightarrow 3<x^2+1<26$

تمرين20: ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $2\sqrt{3}<x<10\Rightarrow 9<x^2-3<97$

الأجوبة: نفترض أن : $2\sqrt{3}<x<10$ ونبين أن : $9<x^2-3<97$

لدينا : $2\sqrt{3}<x<10$ اذن : $12<x^2<100$ اذن : $9<x^2-3<97$

ومنه : $2\sqrt{3}<x<10\Rightarrow 9<x^2-3<97$

تمرين21: ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن : $2<x<4\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

الأجوبة: نفترض أن : $2<x<4$ ونبين أن : $\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

لدينا : $2<x<4$ اذن : $2-1<x-1<4-1$

اذن : $1<x-1<3$ اذن : $\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

ومنه : $2<x<4\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

تمرين22: ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن : $-2<x<\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

الأجوبة: نفترض أن : $-2<x<\frac{1}{3}$ ونبين أن : $\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

لدينا : $-2<x<\frac{1}{3}$ اذن: $-2+4<x+4<\frac{1}{3}+4$ اذن $2<x+4<\frac{13}{3}$

اذن $\frac{3}{13}<\frac{1}{x+4}<\frac{1}{2}$

ولدينا : $-2<x<\frac{1}{3}$ اذن $-6<3x<1$ اذن: $-1<-3x<6$

اذن $4<-3x+5<11$

ومنه : $\frac{12}{13}<\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$ ومنه $\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

تمرين23: بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

$p\ "(\forall x\in\mathbb{R}^*);x+\frac{1}{x}\geq 2\ "$

الأجوبة: نعتبر : $x=-2$ لدينا : $-2+\frac{1}{-2}=-\frac{5}{2}<2$

اذن : p خاطئة

تمرين24: بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

p " $\forall x\in]0;1[$ و $\forall y\in]0;1[$, $0<\frac{x+y}{xy(1-xy)}<1$ "

الجواب : نعتبر : $x=\frac{1}{2}$ و $y=\frac{1}{2}$ لدينا : $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{12}}=\frac{12}{3}>1$

اذن : p خاطئة

تمرين25: بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

p " $(\forall x\in\mathbb{R});x^2\ge x$ "

الأجوبة: نعتبر : $x=\frac{1}{2}$ لدينا : $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ اذن : p خاطئة

تمرين26: ليكن $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$

بين أن: $x+y>1\Rightarrow y>\frac{1}{2}$ أو $x>\frac{1}{2}$

الجواب : نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}\Rightarrow x+y\le1$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}$ اذن : $x+y\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ اذن : $x+y\le1$

ومنه : $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}\Rightarrow x+y\le1$ وبالتالي : $x+y>1\Rightarrow y>\frac{1}{2}$ أو $x>\frac{1}{2}$

تمرين27: بين باستعمال بالاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس أنه : اذا كان $x\in]1;+\infty[$ و $y\in]1;+\infty[$:

$(x\ne y)\Rightarrow(x^2-2x\ne y^2-2y)$

الجواب : نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x=y$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x^2-2x-y^2+2y=0$

$\Rightarrow x^2-y^2-2(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x+y)-2(x-y)=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y-2)=0\Rightarrow x-y=0$ أو $x+y-2\Rightarrow x=y$ أو $x+y-2=0$

ونعلم أن : $x\in]1;+\infty[$ يعني $x>1$ و: ونعلم أن : $y\in]1;+\infty[$ يعني $y>1$

ومنه $x+y>2$ يعني $x+y-2>0$ ومنه $x+y-2\ne0$

ومنه : $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x=y$

وبالتالي : $(x\ne y)\Rightarrow(x^2-2x\ne y^2-2y)$

تمرين28: ليكن : $x\in\mathbb{R}$ بين أن : $x\ne-8\Rightarrow\frac{x+2}{x+5}\ne2$

الجواب : نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x=-8$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x+2=2(x+5)$

$x+2=2(x+5)\Rightarrow x+2=2x+10\Rightarrow-x=8\Rightarrow x=-8$

ومنه : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x=-8$

تمرين29: $x\in]1;+\infty[$ و $y\in]2;+\infty[$

بين أن : $(x\ne y)\Rightarrow(x^2-3x\ne y^2-3y)$

الجواب : نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x=y$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x^2-3x-y^2+3y=0$

$\Rightarrow x^2-y^2-3(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x+y)-3(x-y)=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y-3)=0\Rightarrow x-y=0$ أو $x+y-3\Rightarrow x=y$ أو $x+y-3=0$

ونعلم أن : $x\in]1;+\infty[$ يعني $x>1$ و: ونعلم أن : $y\in]2;+\infty[$

يعني $y>2$ ومنه $x+y>3$ يعني $x+y-3>0$ ومنه $x+y-3\ne0$

ومنه : $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x=y$

وبالتالي : $(x\ne y)\Rightarrow(x^2-3x\ne y^2-3y)$

تمرين30: بين أن : $(\forall a\in\mathbb{R});(\forall b\in\mathbb{R})\quad a^2+b^2\ge2ab$

الأجوبة: نستعمل الاستدلال بالتكافؤ:

$a^2+b^2\ge2ab\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a-b)^2\ge0$ وهذا صحيح لأن المربع دائما موجب

وبالتالي : $(\forall a\in\mathbb{R});(\forall b\in\mathbb{R})\quad a^2+b^2\ge2ab$

تمرين31: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):|3x-6|=1$

الأجوبة: ندرس اشارة : $3x-6$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

الحالة 1: اذا كانت : $x\ge2$ فان : $3x-6\ge0$

ومنه : $(E):|3x-6|=1$

$x=\frac{7}{3}\in S\Leftrightarrow3x=7\Leftrightarrow3x-6=1\Leftrightarrow$

الحالة 2: اذا كانت : $x\le2$ فان : $3x-6\le0$

ومنه : $(E):|3x-6|=1$

$-3x+6=1\Leftrightarrow-(3x-6)=1\Leftrightarrow$

$x=\frac{5}{3}\in S\Leftrightarrow-3x=-5\Leftrightarrow$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\left\{\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right\}$

تمرين32: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $3+2|x-4|=x+5$

الجواب : ندرس اشارة : $x-4$

الحالة 1: اذا كانت : $x\ge4$ فان : $x-4\ge0$ ومنه : $|x-4|=x-4$

$x=10\in S\Leftrightarrow3+2x-8=x+5\Leftrightarrow3+2|x-4|=x+5$

الحالة 2: اذا كانت : $x\le4$ فان : $x-4\le0$ ومنه : $|x-4|=-x+4$

$x=2\in S\Leftrightarrow3-2x+8=x+5\Leftrightarrow3+2|x-4|=x+5$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\{2;10\}$

تمرين33: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):x^2-|x+1|+1=0$

الجواب : ندرس اشارة : $x+1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

الحالة1: اذا كانت : $x\ge-1$ فان : $x+1\ge0$

ومنه : $(E):x^2-|x+1|+1=0$

$x(x-1)=0\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x^2-(x+1)+1=0\Leftrightarrow$

$x=0\in S$ أو $x=1\in S\Leftrightarrow$

الحالة2: اذا كانت : $x\le-1$ فان: $x+1\le0$

ومنه : $(E): x^2-|x+1|+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+(x+1)+1=0 \Leftrightarrow x^2+x+2=0$ وهذه المعادلة ليس لها

حل في $\mathbb{R}$ لأن : $\Delta=-7<0$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\{0;1\}$

تمرين34: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات .بين أن : n^2+n عدد زوجي $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب : الحالة 1: n عدد زوجي اذن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k$

$n^2+n=(2k)^2+2k=4k^2+2k=2(2k^2+k)=2k'$

ومنه : n^2+n عدد زوجي

الحالة 2: n عدد فردي اذن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k+1$

$n^2+n=(2k+1)^2+2k+1=4k^2+4k+1+2k+1$

ومنه : $n^2+n=4k^2+6k+2=2(2k^2+3k+1)=2k'$ ومنه n^2+n عدد زوجي

وبالتالي : n^2+n عدد زوجي $\forall n\in\mathbb{N}$

تمرين35: بين باستعمال الاستدلال بالخلف أن : $\frac{x^2-1}{x^2+1}\neq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}/$

الأجوبة: لكي نبرهن أن عبارة صحيحة نفترض أن العبارة خاطئة ونحاول الحصول على تناقض مع المعطيات

نفترض أن : $\exists x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$

يعني $x^2-1=x^2+1$ يعني $-1=1$ وهذا غير صحيح

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : $\forall x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}\neq1$

تمرين36: **بين أنه اذا كان** $n\in\mathbb{N}$ n^2 عدد زوجي فان : n عدد زوجي

الأجوبة: نفترض أن : n عدد فردي

أي أن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k+1$

ومنه : $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$

أي : n^2 عدد فردي وهذا يتناقض مع المعطيات : n^2 عدد زوجي

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : n عدد زوجي

تمرين37: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\geq 1+2n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0\geq 1+2\times0$ أي : $1\geq1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $3^n\geq1+2n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $3^{n+1}\geq 1+2(n+1)$ أي نبين أن : $3^{n+1}\geq 2n+3$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$3^n\geq1+2n$ اذن : $3^n\times3\geq3\times(1+2n)$

يعني : $3^{n+1}\geq 6n+3$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $6n+3\geq 2n+1$ (يمكن حساب الفرق)

$(6n+3)-(2n+1)=6n+3-2n-1=4n+2\geq0$

لدينا اذن : $3^{n+1}\geq 6n+3$ و $6n+3\geq 2n+1$ ومنه : $3^{n+1}\geq 2n+3$

تمرين38: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\geq1+n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0\geq 1+0$ أي : $1\geq1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $3^n\geq1+n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $3^{n+1}\geq1+(n+1)$ أي نبين أن : $3^{n+1}\geq n+2$ ؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $3^n\geq1+n$ اذن : $3^n\times3\geq3\times(1+n)$

يعني : $3^{n+1}\geq3n+3$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $3n+3\geq n+2$ (يمكن حساب الفرق)

$(3n+3)-(n+2)=3n+3-n-2=2n+1\geq0$

لدينا اذن : $3^{n+1}\geq 3n+3$ و $3n+3\geq n+2$ ومنه : $3^{n+1}\geq n+2$

تمرين39: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};2^n\geq1+n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $2^0\geq 1+0$ أي : $1\geq1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $2^n\geq1+n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $2^{n+1}\geq1+(n+1)$ أي نبين أن : $2^{n+1}\geq n+2$ ؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $2^n\geq1+n$ اذن : $2^n\times2\geq2\times(1+n)$

يعني : $2^{n+1}\geq2n+2$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $2n+2\geq n+2$ (يمكن حساب الفرق)

$(2n+2)-(n+2)=n\geq0$

لدينا اذن : $2^{n+1}\geq2n+2$ و $2n+2\geq n+2$ ومنه : $2^{n+1}\geq n+2$

تمرين40: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$\forall n\in\mathbb{N}^*: 1+2+3+\dots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1=\frac{1\times(1+1)}{2}=\frac{1\times2}{2}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1+2+3+\dots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $1+2+3+\dots+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$ ؟؟

لدينا : $1+2+3+\dots+n+(n+1)=(1+2+3+\dots+n)+(n+1)$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1+2+3+\dots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

اذن : $1+2+3+\dots+n+(n+1)=\frac{n\times(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$1+2+3+\dots+n+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

لدينا اذن : $\forall n\in\mathbb{N}^*: 1+2+3+\dots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

تمرين41: بين n^3+2n يقبل القسمة على 3 مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n

الجواب : يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $0^3+2\times0=0$ مضاعف للعدد 3 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3+2(n+1)=3k'$ ؟؟؟؟

$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=$

$(n^3+2n)+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$

$=3(k+n^2+n+1)=3k'$ مع $k'=k+n^2+n+1$

ومنه : $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3+2(n+1)=3k'$

وبالتالي n^3+2n يقبل القسمة على 3 مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n

تمرين42: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n\in \mathbb{N}^*\ :\ 1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$$

الجواب :ـنمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1^2=\frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}=\frac{1\times2\times3}{6}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$ ؟

لدينا : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)+(n+1)^2$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

اذن : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)$$

$$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right)=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$$

ويمكننا أن نلاحظ أن : $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

ومنه : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$

تمرين43: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: 1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

الجواب :ـنمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^3=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}\right)^2$ ؟؟

لدينا : $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(1^3+2^3+3^3+...+n^3\right)+(n+1)^3$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

اذن : $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+(n+1)\right)=(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$$

$$=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{2^2}=^2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N}^*: 1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

تمرين44: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}: 2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$$

الجواب :ـنمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $2^0=1$ و $2^{0+1}-1=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=\left(2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n\right)+2^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$

اذن : $=2^{n+1}-1+2^{n+1}=2\times2^{n+1}-1=2^1\times2^{n+1}-1=2^{n+2}-1$

ومنه : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1$

والتالي : $\forall n\in\mathbb{N}: 2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$

تمرين45: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ : 5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$$

الجواب :ـنمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $5^0=1$ و $\frac{5^{0+1}-1}{4}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $5^0+5^1+5^2+5^3+...+5^n+5^{n+1}=\left(5^0+5^1+5^2+5^3+...+5^n\right)+5^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$

اذن : $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+1}-1}{4}+5^{n+1}$

$$=\frac{5^{n+1}-1+4\times5^{n+1}}{4}=\frac{5\times5^{n+1}-1}{4}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$$

ومنه : $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$

والتالي : : $\forall n\in\mathbb{N}\ : 5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$

تمرين46: 1) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\ : 3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

2) أ) بين أن : $12n+14\geq 6(n+1)+7 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $2^n\geq 6n+7 \quad \forall n\geq 6$

الجواب :ـ1) نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0=1$ و $\frac{3^{0+1}-1}{2}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$ ؟؟

لدينا : $3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n+3^{n+1}=\left(3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n\right)+3^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

اذن : $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{2}+3^{n+1}$

$$=\frac{3^{n+1}-1}{2}+3^{n+1}=\frac{3^{n+1}-1+2\times3^{n+1}}{2}=\frac{3\times3^{n+1}-1}{2}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$$

ومنه : $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$

والتالي : : $\forall n\in\mathbb{N}\ : 3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

2)أ) نبين أن : $12n+14\geq 6(n+1)+7 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق :

$$(12n+14)-(6(n+1)+7)=2n+14-6n-6-7=6n+1\geq 0$$

ومنه : $12n+14\geq 6(n+1)+7 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2)ب) نبين أن : $2^n\geq 6n+7 \quad \forall n\geq 6$ ؟؟؟؟؟

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=6$

لدينا $2^6 \geq 6\times6+7$ لأن : $64 \geq 43$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=6$

المرحلة2: نفترض أن: $2^n \geq 6n+7$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $2^{n+1} \geq 6(n+1)+7$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $2^n \geq 6n+7$ اذن : $2\times2^n \geq 2\times(6n+7)$

يعني : $2^{n+1} \geq 12n+14$ اذن لم نجد بعد النتيجة

وحسب السؤال 2)أ) لدينا : $12n+14 \geq 6(n+1)+7 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

لدينا اذن : $2^{n+1} \geq 12n+14$ و $12n+14 \geq 6(n+1)+7$

ومنه : $2^{n+1} \geq 6(n+1)+7$

وبالتالي : $\forall n\geq 6 \quad 2^n \geq 6n+7$ ؟؟؟؟؟

تمرين47:
بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1\times(1+1)=1\times2=2$ و $\frac{1}{3}\times1\times(1+1)\times(1+2)=\frac{1}{3}\times2\times3=2$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$

المرحلة3: نبين أن :

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}(n+1)\times(n+2)\times(n+3) \text{ ؟؟}$$

لدينا حسب افتراض الترجع : $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$

اذن:

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)+(n+1)\times(n+2)$$

$$=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)+(n+1)\times(n+2)=(n+1)\times(n+2)\left(\frac{1}{3}n+1\right)=(n+1)\times(n+2)\left(\frac{n+3}{3}\right)$$

ومنه

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}(n+1)\times(n+2)\times(n+3)$$

تمرين48:
بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $\frac{1\times(1+3)}{4(1+1)\times(1+2)}=\frac{4}{4\times2\times3}=\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{6}$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن:

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)} \text{ صحيحة}$$

المرحلة3: نبين أن:

$$S=\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\times(n+4)}{4(n+2)\times(n+3)} \text{ ؟؟}$$

لدينا حسب افتراض الترجع :

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$$

اذن :

$$=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n\times(n+3)^2}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}+\frac{4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

$$=\frac{n\times(n+3)^2+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n\times(n^2+6n+9)+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

يمكننا أن نبين أن : $n^3+6n^2+9n+4=(n+1)^2\times(n+4)$

ومنه: $S=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)^2\times(n+4)}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\times(n+4)}{4\times(n+2)\times(n+3)}$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$

تمرين49:
بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}$. $b_n=4^{2n+2}-1$ يقبل القسمة على 15

الجواب : يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/b_n=15k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $b_0=4^{2\times0+2}-1=4^2-1=15$

مضاعف للعدد 15 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/4^{2n+2}-1=15k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/4^{2(n+1)+2}-1=15k'$ ؟؟؟؟؟

أي نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/4^{2n+4}-1=15k'$ ؟؟؟؟؟

أي نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/b_{n+1}=15k'$ ؟؟؟؟؟

نحسب مثلا : $b_{n+1}-b_n=\left(4^{2n+4}-1\right)-\left(4^{2n+2}-1\right)$

$$b_{n+1}-b_n=4^{2n+2+2}-4^{2n+2}=4^{2n+2}\left(4^2-1\right)$$

$$b_{n+1}-b_n=15\times4^{2n+1}$$

اذن : $b_{n+1}-b_n=15\times4^{2n+1}$ يعني $b_{n+1}=15\times4^{2n+1}+b_n$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $\exists k\in\mathbb{N}/b_n=15k$

ومنه $b_{n+1}=15\times4^{2n+1}+15k$ اي $b_{n+1}=15\times(4^{2n+1}+k)$

وبالتالي $\exists k'\in\mathbb{N}/b_{n+1}=15k'$

تمرين50:
بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}$. n^3-n يقبل القسمة على 6

الجواب : يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/n^3-n=6k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $0^3-0=0$ مضاعف للعدد 6 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/n^3-n=6k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3-(n+1)=6k'$ ؟؟؟؟؟

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=$$

$$=(n^3-n)+3n^2+3n=6k+3(n^2+n)=6k+3n(n+1)$$

ونعلم أن : $n(n+1)$ عدد زوجي لأنه جداء عددين متتاليين $n(n+1)=2m$

$$(n+1)^3-(n+1)=6k+3\times2m=6k+6m=6(k+m)=6k'$$

وبالتالي: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3-(n+1)=6k'$

تمرين51:
1) بين أن : $11^{n+1}-1=10\times11^n+11^n-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: 11^n-1 مضاعف للعدد 10 $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب : 1) $11^{n+1}-1=11\times11^n-1=(10+1)\times11^n-1=10\times11^n+11^n-1$

2) يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/11^n-1=10k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $11^0-1=1-1=0$ مضاعف للعدد 10 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k \in \mathbb{N}/11^n-1=10k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k \in \mathbb{N}/11^{n+1}-1=10k'$ ؟؟؟؟؟

نعلم حسب 1) $11^{n+1}-1=10\times 11^n+11^n-1$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $\exists k \in \mathbb{N}/11^n-1=10k$

اذن: $11^{n+1}-1=10\times 11^n+10k$

اذن: $11^{n+1}-1=10\left(11^n+k\right)=10k'$ مع $k'=11^n+k$

ومنه : $11^{n+1}-1$ مضاعف للعدد 10

وبالتالي: 11^n-1 مضاعف للعدد 10 $\forall n\in\mathbb{N}$

تمرين52: نضع : $A_n=3^{2n}-2^n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) تحقق من أن : $A_{n+1}=2A_n+7\times 3^{2n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

2) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : A_n مضاعف للعدد 7 $\forall n\in\mathbb{N}^*$

الجواب 1) $A_{n+1}=3^{2(n+1)}-2^{n+1}=3^{2n+2}-2^{n+1}=3^{2n}\times 3^2-2^n\times 2^1$

$A_{n+1}=9\times 3^{2n}-2^n\times 2^1=(7+2)\times 3^{2n}-2^n\times 2^1=7\times 3^{2n}+2\times 3^{2n}-2^n\times 2^1$

$A_{n+1}=7\times 3^{2n}+2\times 3^{2n}-2^n\times 2^1=7\times 3^{2n}+2\left(3^{2n}-2^n\right)=7\times 3^{2n}+2\times A_n$

2) يعني نبين : $\exists k \in \mathbb{N}^*/A_n=7k$

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $A_1=3^{2\times 1}-2^1=3^2-2=9-2=7$

مضاعف للعدد 7 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k \in \mathbb{N}^*/A_n=7k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k' \in \mathbb{N}^*/A_{n+1}=7k'$ ؟؟؟؟؟

حسب السؤال1) : $A_{n+1}=7\times 3^{2n}+2\times A_n$

اذن : $A_{n+1}=7\times 3^{2n}+2\times A_n=7\times 3^{2n}+2\times 7k=7\times\left(3^{2n}+2k\right)=7\times k'$

وبالتالي : $A_n=3^{2n}-2^n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

تمرين53: ليكن a عدد حقيقي موجب قطعا

1) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N};(1+a)^n\geq 1+n\times a$

2) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N};\quad 2^n>n$

الجواب : 1) نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $(1+a)^0\geq 1+0\times a$ لأن : $1\geq 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $(1+a)^n\geq 1+n\times a$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $(1+a)^{n+1}\geq 1+(n+1)\times a$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $(1+a)^n\geq 1+n\times a$

اذن : $(1+a)(1+a)^n\geq(1+a)(1+n\times a)$

يعني : $(1+a)^{n+1}\geq(1+a)(1+n\times a)$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نقارن : $(1+a)(1+n\times a)$ و $1+(n+1)\times a$ (يمكن حساب الفرق)

$(1+a)(1+n\times a)-\left(1+(n+1)\times a\right)=1+na+a+na^2-1-n\times a-a$

$(1+a)(1+n\times a)-\left(1+(n+1)\times a\right)=na^2\geq 0$

اذن : $(1+a)(1+n\times a)\geq\left(1+(n+1)\times a\right)$

ومنه : $(1+a)^{n+1}\geq 1+(n+1)\times a$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N};(1+a)^n\geq 1+n\times a$

2) وجدنا : $\forall a>0;\forall n \in \mathbb{N};(1+a)^n\geq 1+n\times a$

نأخذ مثلا : $a=1$ فنجد : $\forall n \in \mathbb{N};(1+1)^n\geq 1+n\times 1$

أي : $\forall n \in \mathbb{N};2^n\geq 1+n$

ولكن نعلم أن : $\forall n \in \mathbb{N}:1+n>n$

اذن : $\forall n \in \mathbb{N};2^n>n$

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien