التمرين الأول

حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

(P_1) $\sqrt{16} = -4$ أو $(-3)^2 = 9$ ، (P_2) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7} > 3\right)$ و $(\pi \in \mathbb{Q})$

(P_3) $\left(a \in \mathbb{R}^*\right)$: $\sqrt{a^2+4} = a+2$ ، (P_4) $\left((a,b) \in \mathbb{R}^2\right)$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

التمرين الثاني

باستعمال الرموز المنطقية أكتب العبارات التالية :

1) لكل عدد حقيقي x يوجد على الأقل عدد طبيعي n بحيث $n > x$

2) لكل عدد حقيقي x يوجد عدد نسبي وحيد p بحيث : $p \le x < p+1$

3) لكل عدد x من $\mathbb{R}^{+*}$ و لكل عدد y من $\mathbb{R}$ يوجد على الأقل عدد طبيعي n بحيث $nx \ge y$

التمرين الثالث

حدد نفي كل من العبارات التالية :

(P_1) " $x \le 0$ أو $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) x + \frac{1}{x} \ge 2$ " ، (P_2) "$\left(\exists x \in \mathbb{Q}\right)$ $x \le 1 \Rightarrow x^2 > 1$ "

(P_3) " $\left(\exists a \in \mathbb{R}\right)$: $\sqrt{a^2+4} = a+2$ " ، (P_4) " $\left(\exists a \in \mathbb{R}\right)\left(\forall b \in \mathbb{R}^+\right)$ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ "

التمرين الرابع

بين ما يلي :

1) $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right)$: $1+xy = x+y \Rightarrow x = 1$ أو $y = 1$

2) $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right)$: $\left(\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2} \Rightarrow x = 0\right)$

3) $(\forall n \in \mathbb{N})$: (n زوجي) $\Rightarrow$ (n^2 زوجي)

4) $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$ ($x \ne y$ و $xy \ne 1$) $\Rightarrow$ $\left(\frac{x}{x^2+x+1} \ne \frac{y}{y^2+y+1}\right)$

5) $(\forall n \in \mathbb{N})$: (n^2 زوجي) $\Rightarrow$ (n زوجي)

التمرين الخامس

1) ليكن x , y , z أعداد حقيقية بحيث : $x+y > 2z$ بين بالخلف أن : $y > z$ أو $x > z$

2) علما أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ و ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ بحيث : $a+b\sqrt{2} = 0$ بين بالخلف أن $a = 0$ و $b = 0$

3) عدد حقيقي موجب قطعا وبحيث $a^3+3a^2-2 \ge 0$ بين بالخلف أن $a \ge \sqrt{3}-1$

التمرين السادس

باستعمال البرهان بالترجع بين ما يلي :

1) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$: $1-3+5+.....+(-1)^n(2n+1) = (-1)^n(n+1)$

2) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right)$ $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times.....\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$ بين بالترجع أن

3) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right)$ $\left(2\times3^2\right)+\left(2^2\times3^3\right)+.....+\left(2^{n-1}\times3^n\right) = \frac{18}{5}\left(6^{n-1}-1\right)$

4) بين أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$: $11 / 9^{n+1}+2^{6n+1}$ 5) $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$: $5 / 3^{2n}-2^{2n}$

6) بين أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$: $\sum_{k=1}^{k=n} k2^k = 2+(n-1)2^{n+1}$