BR@M@THS

مبادئ في المنطق Notions de logiques

القدرات المنتظرة

تعرف عبارة.تحديد قيمة حقيقة عبارة. تعرف نفي عبارة . تعرف عطف وفصل واستلزام وتكافؤ عبارتين . توظيف العمليات على المكممات والعبارات .التعرف على الاستدلالات الرياضية (الاستدلال بالخلف .الاستدلال بالعكس الاستدلال بفصل الحالات .الاستدلال بالتكافؤ الاستدلال بالترجع . توظيف الاستدلالات الرياضية)

I. تعـــــاريف ومصـــــطلحات

1 - العبارة – الدالة العبارية

أ - تعريف

العبارة في المنطق هي كل نص **رياضي** يحمل معنى يكون **إما** صحيحا أو خاطئا

مثال : 2 =3 عبارة خاطئة

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ عبارة خاطئة

$2 \neq 5$ عبارة صحيحة

ب- تعريف

الدالة العبارية في المنطق هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة ويصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة .

نرمز للدالة العبارية ب $P(x)$.

Brahim Ajghaider

د- ملاحظة

إذا كان لدينا متغيرين x و y نكتب $P(x;y)$ ونكتب $P(x;y;z)$ أو $P(x;y;z;k)$ اذا كان أكثر من متغيرين

2 - المكممات les quantificateurs

لتكن $P(x)$ دالة عبارية و E مجموعة فارغة

- العبارة $P(x)$ $(\exists x \in E)$: التي تكون صحيحة إذا وفقط إذا كان يوجد على الأقل عنصر واحد من E يحقق $P(x)$ ونقرا يوجد على الأقل عنصر x من E يحقق $P(x)$ ويسمى هذا الرمز المكمم الوجودي

- العبارة $(\forall x \in E)P(x)$ التي تكون صحيحة إذا وفقط إذا كان جميع عناصر المجموعة E تحقق الخاصية $P(x)$ ونقرا مهما يكن x من E ويسمى هذا المكمم الكوني

مثال1 :

باستعمال المكممات اكتب العبارات التالية

1 . لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد صحيح طبيعي m بحيث $n = 2m$

2 . لكل عددين حقيقيين x و y يوجد عدد صحيح طبيعي n بحيث $x - y = m$

مثال2 اكتب العبارات التالية بدون مكممات

-1 $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 = 1$

-2 $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\, y \prec x$

- 3 $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(\exists m \in \mathbb{Z})\, nx \prec m$

Brahim Ajghaider

ملاحظة

- المكمم الكوني (مهما يكن) .الرمز $\forall$
- المكمم الوجودي (يوجد عنصر من) .الرمز$\exists$
- المكمم الوجودي للوحدانية $\exists!$

➢ إذا كانت المكممات من نفس الطبيعة فا ن ترتيبها ليتق له أهمية في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة المكممة

➢ أما إذا كانت من طبيعة مختلفة فترتيبها له أهمية فيتحديد المعنى الذي تحمله العبارة المكممة

II. العمليـــــــات المنـــــــطقيـــــة

1. النــــفــي المنطقي négation

أ - تعـــريف

نفي العبارة P هي العبارة التي تكون خاطئة إذا كانت P صحيحة وصحيحة إذا كانت P خاطئة ونرمز لها ب $\overline{P}$ أو $7P$

ويعبر عن النفيبجدول الحقيقة التالي

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

مع العدد0 يعني عبارة خاطئة و1 يعني عبارة صحيحة $(V=1)et(F=0)$

(نفي العبارة الصحيحة هي الخاطئة والعكس بالعكس)

ب نـــــفي عبارة مكمـــمة

- نفي العبارة $(\exists x\in E)\ P(x)$ هي: $(\forall x\in E)P(x)$
- نفي العبارة $(\forall x\in E)P(x)$ هي $(\exists x\in E)\ P(x)$:

▪ (نفي المكمم الكوني هو الوجودي والوجودي هو الكوني)

Brahim Ajghaider

ج -* **تطبيق 1** لتكن العبارة التالية $P: \forall x \in \mathbb{R}^+; \sqrt{x} \prec x$

1- حدد نفي العبارة P

2- بين أن $\overline{P}$ عبارة صحيحة

3- هل P عبارة صحيحة

2. الفـــــصل المنـطـقي disjonction

أ - تعريف

فصل عبارتين P و Q هو عبارة تكون صحيحة إذا كانت على **الأقل إحدى العبارتين** P و Q صحيحة ونرمز له ب P أو Q

ونعبر عنه بجدول الحقيقة

P	Q	P أو Q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ب- ملاحظة

الفصل تبادلي (P أو Q) و (Q أو P) لهما نفس المعنى

* **تطبيق 2** لتكن العبارة الآتية $P: \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \left(x^2 \geq x\ x^2 + 1 \succ 0\right)$

1 - بين أن العبارة P صحيحة

2- حدد نفي العبارة P

تطبيق 3* حدد حقيقة العبارات التالية

1 - $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ أو $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + 1 \neq 0$

2 - $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ أو $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + 1 = 0$

Brahim Ajghaider

3.العـــطـــف المنطقي conjonction

أ تعريف

عطف عبارتين P و Q هو عبارة تكون صحيحة إذا كانت P و Q صحيحتان معا ونرمز له ب P و Q

ونعبر عنه بجدول الحقيقة

P	Q	QوP
1	1	1
1	0	
0	1	0
0	0	0

ملاحظة العطف تبادلي (Q و P) او (Q و P) لهما نفس المعنى

4.الاســـــتلـــزام المنطقي implication

ا- تعـــريف

انطلاقا من العبارتين P و Q نحصل على العبارة نفي P أو Q $(\overline{P}Q\ \ )$

التي تكون خاطئة إذا وفقط إذا كانت P صحيحة و Q خاطئة

العبارة $(\overline{P}Q\ \ )$ تسمى استلزام P و Q و نكتب $P \Rightarrow Q$

ونقرا (P تستلزم Q) أو (إذا كانت P فان Q) أو (من P نستنتج Q)

ونعبر عنه بجدول الحقيقة

P	Q	P $\Rightarrow$Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ملاحظة العبارتان $(P \Rightarrow Q)$ و $(Q \Rightarrow P)$ لتحملان نفس المعنى

Brahim Ajghaider

تطبيق4

بين انه لكل x من $\mathbb{R}$ ولكل y من $\mathbb{R}$ فان $1+xy=x+y \Rightarrow (x=1$ أو $y=1)$

تطبيق5

بين أن $\forall x\in[0;1[\ \forall y\in\mathbb{R}: y\neq 1 \Rightarrow 1+xy\neq x+y$

تطبيق6 حدد حقيقة العبارات التالية

$P:\left(\forall x\in\mathbb{R}; x^2\geq 0 \Rightarrow \sqrt{2}\prec\sqrt{3}\right)$

$\left(\forall x\in\mathbb{R}; x^2\geq 0 \Rightarrow 2\prec\sqrt{3}\right)$

$\sqrt{2}+\sqrt{3}\prec\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{2}\leq\sqrt{2}$

$\sqrt{2}+\sqrt{3}\prec\sqrt{5} \Rightarrow 7\in\mathbb{N}$

5.التــكافــــــؤ المنطقي équivalence

ا- تعريف

تكافؤ العبارتين P و Q هو العبارة $(P\Rightarrow Q$ و $Q\Rightarrow P)$ التي تكون صحيحة إذا كانت لـ P و Q نفس قيم الحقيقة ونرمز للتكافؤ ب $P\Leftrightarrow Q$ ونقرا(لدينا P إذا وفقط إذا كانت) أو (P تكافئ Q)

ونعبر عنه بجدول الحقيقة التالي

P	Q	$P\Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Brahim Ajghaider

III. القـــــــوانـــيـن المنـــــطـقـيـة

1 - تعريف

كل عبارة مكونة من عدة عبارات A وb وC ... مرتبطة بينها بالعمليات المنطقية وتكون صحيحة مهما كانت A وb وC ... العبارات تسمى قانونا منطقيا

2 قوانين موركان

$7(A \text{ و } B) = 7A \quad 7B$ و $7(AB) = 7A \text{ او } B7$

$A(C \text{ او } B) = (AB) \text{ أو } (AC)$

$A \text{ أو } (BC) = (A \text{ أو } B) \text{ و } (AC)$

3 قانون التكافؤات المتتالية

$(A \Leftrightarrow B) \text{ و } (A \Leftrightarrow C) \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)$

4. قانون فصل الحالات

$(A \Rightarrow C) \text{ و } \Rightarrow C\ (AB) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

5. قانون بالخلف

$(7q \Rightarrow 7p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

6 *مبدأ الترجع

البرهان بالترجع يعتمد على ثلاث عناصر أساسية

التحقق : نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة للحد الأول

الافتراض: نفترض أن العبارة صحيحة بالنسبة للحد n

البرهان: نبرهن أن العبارة صحيحة بالنسبة للحد $n+1$

Brahim Ajghaider