حدد النهايات التالية

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+3x^3+x}{-5x^5+2x-1} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}-2x^4+3x^3+x-1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to2}3+x-3x^2$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{-2x+1}{x^2-x-2} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to1^+}\frac{-2x+1}{x^2-3x+2} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{7x^4+x^2+1}{-x^8-2x-1} \quad \text{و}$$

$$\text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x \quad \text{و} \quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to2^-}\frac{-2x+1}{x^2-x-2} \quad \text{و}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan^2 x+2} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin x} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x+1}}$$

$$\text{و} \quad \lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}$$

الجواب

نحدد النهايات

$$* \quad \lim_{x\to2}3+x-3x^2=-7 \qquad \lim_{x\to-\infty}-2x^4+3x^3+x-1=\lim_{x\to-\infty}-2x^4=-\infty$$

$$* \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+3x^3+x}{-5x^5+2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{-5x^5}=-\frac{2}{5}$$

$$* \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$$

$$* \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{7x^4+x^2+1}{-x^8-2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^4}{-x^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7}{x^4}=0$$

$$* \quad \lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{x+3}=-\frac{1}{4}$$

$$* \quad \text{نحدد} \quad \lim_{x\to1^+}\frac{-2x+1}{x^2-3x+2}$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to1^+}x^2-3x+2=0^- \qquad \lim_{x\to1^+}-2x+1=-1 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x\to1^+}\frac{-2x+1}{x^2-3x+2}=+\infty$$

* لدينا $\lim\limits_{x\to 2} x^2 - x - 2 = 0$ و $\lim\limits_{x\to 2} -2x + 1 = -3$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه $\lim\limits_{x\to 2^+} x^2 - x - 2 = 0^+$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} x^2 - x - 2 = 0^-$

إذن $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-2x+1}{x^2 - x - 2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-2x+1}{x^2 - x - 2} = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{(\sqrt{2x-1}+1)} = 1$

* لدينا $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$

و حيث x تؤول إلى $+\infty$ فان x موجبة ومنه $|x| = x$

ومنه $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \dfrac{1}{2}$

* $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x} + x = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}$

و حيث x تؤول إلى $-\infty$ فان x سالبة ومنه $|x| = -x$

إذن $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x} + x = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1} = -\dfrac{1}{2}$

* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x-2\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x-2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x-2|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$

و حيث x تؤول إلى $+\infty$ فان x موجبة ومنه $|x| = x$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x-2\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{1-2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1$

* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 2$

$$* \quad \text{لدينا} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\times\frac{\sin 5x}{5x}\times 5$$

$$\text{نعلم أن} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

$$\text{و حيث} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1 \quad \text{فان} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin x}=1\times 1\times 5=5$$

$$* \quad \text{لدينا} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan^2 x=+\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan^2 x+2}=0$$

$$* \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}\times\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$\text{نعلم أن} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$

$$\text{لدينا} \quad \lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}+1=2 \quad \text{إذن} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$* \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x\cdot\sin x}{2\sin 2x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}-\tan x=0$$

$$* \quad \text{لدينا} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{(1+\sin x)\cos x}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\sin x}{\cos x}= \quad \pi$$

$$\text{لدينا} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}1+\sin x=2 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\cos x=0^- \quad \text{لأن} \quad \cos x\prec 0 \quad \forall x\in\left]-\pi;\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\text{ومنه} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\sin x}{\cos x}=-\infty$$

تمرين2

$$\text{بين أن} \quad \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

الجواب

$$\text{لدينا} \quad -1\le\sin\frac{1}{x}\le 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}^* \quad \text{ومنه} \quad \left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x| \quad \forall x\in\mathbb{R}^*$$

$$\text{و حيث أن} \quad \lim_{x\to 0}|x|=0 \quad \text{فان} \quad \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

تمرين3

$$\text{نعتبر } g \text{ دالتين عددية للمتغير حقيقي } x \text{ حيث} \quad g(x)=\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}$$

1- حدد $\lim_{x\to 0}g(x)$

3- بين أن $|g(x)|\le\frac{1}{x^2}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}^*$ $\quad$ و استنتج $\lim_{x\to+\infty}g(x)$

1- نحدد $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{2-\cos x}+1}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0} 2-\cos x = 1$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2-\cos x}+1} = \frac{1}{2}$

وحيث $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ فان $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

2- نبين أن $\left| g(x) \right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2-\cos x \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{2-\cos x}-1 \leq \sqrt{3}-1 \prec 1$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \left| g(x) \right| = \left| \dfrac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2} \right| = \dfrac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}$

لدينا $0 \leq \sqrt{2-\cos x}-1 \prec 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ و منه $0 \leq \dfrac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2} \prec \dfrac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

إذن $\left| g(x) \right| \leq \dfrac{1}{x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$

نستنتج $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

لدينا $\left| g(x) \right| \leq \dfrac{1}{x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ و منه $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$