تمرين 1

احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x(x-2)} \quad ; \quad \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x-2};$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3} \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-1}{1-x^2};$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x-\pi} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{3x^3-1}{2x^2+5};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\,tgx} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin x};$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-3}}{x-4} \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1};$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x^2+x+4}-4} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2+1};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x+3}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+9}-3} \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-3x}+x;$$

$$\lim_{x\to +\infty}E(x) \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}E(x);$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\cos x\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{2\cos x-\sqrt{2}} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty}\left(x^2+x+1\right)\sin\left(\frac{\pi}{x}\right);$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg2x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{\sin^2 x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{3x+|x|}{3x-2|x|};$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{3x}}{\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos^2 x};$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2x-2)}{\sin(x-1)} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos(2tgx)-1};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{\pi}{2}tgx\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x}+\cos x-3\right);$$

$$**\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x-\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2+x\right)}{2x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x};$$

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\,tg\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{3tgx-\sin x}{x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi\left(\cos^2 x-\cos x\right)}{2\cos^2 x-3\cos x+1} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{tg2x};$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin 2x} \quad ; \quad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4};$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1} \quad ; \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\,tg^2 x \quad ;$$

$$\lim_{|x|\to +\infty}\frac{x^n+2010}{2009x^8-1431} \quad (n\in\mathbb{N}) \quad .$$

تمرين 2 SM

بين أن:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x\sin x+2x\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}E\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

تمرين 3 SM

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=xE\left(\frac{4}{2+x^2}\right).$$

1. **بين أن:** $\forall x\in\,]-1;1[\,,\quad 1\le E\left(\frac{4}{2+x^2}\right)\le 2$.
2. **استنتج أن:** $\forall x\in\,]-1;1[\,,\quad |f(x)|\le 2|x|$.
3. **حدد** $\lim_{x\to 0}f(x)$.

تمرين 4

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي:

$$g(x)=\frac{\sin\sqrt{x}}{x}.$$

1. **حدد** D_g **حيز تعريف الدالة** g .
2. **أحسب نهايات** g **عند محدات** D_g .

تمرين 5

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos(\sin x)}{x^2} & ,x>0 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & ,x<0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

ادرس اتصال الدالة f في $x_0=0$.

تمرين 6

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} \\ f(0)=0 \end{cases}.$$

ادرس اتصال الدالة f في $x_0=0$.

تمرين 7

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}.$$

1. حدد حيز تعريف الدالة f.
2. بين أن f دالة زوجية.
3. بين أن الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في $x_0=0$.

تمرين SM 8

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$g(x)=x-E(x).$$

1. بين أن:
$(\forall x\in\mathbb{R})(\forall p\in\mathbb{Z}):\ g(x+p)=g(x)$.
2. بين أن g تقبل عند $x=n$ $(n\in\mathbb{N})$ نهاية على اليمين و نهاية على اليسار، ثم حددهما.
3. أنشئ منحنى الدالة g.

تمرين SM 9

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1;1[$ بما يلي:

$$f(x)=E(x)\sqrt{|x|}.$$

1. عبر عن $f(x)$ بدون استعمال القيمة المطلقة و الجزء الصحيح.
2. ادرس اتصال الدالة f في $x_0=0$.

تمرين 10

x قياس زاوية حادة و y قياسها بالراديان.

1. بين أن: $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\pi}{180}\dfrac{\sin y}{y}$.
2. استنتج أن: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\pi}{180}$.

تمرين SM 11

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\sqrt{\cos^2(\pi x)-1}.$$

1. حدد D_f.
2. اعط مجموعة قيم الدالة f.
3. بين أن f دالة فردية.
4. بين أن f دالة دورية محددا دورا لها.
5. أنشئ الدالة f.

تمرين SM 12

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} h(x)=x^2 & ,x\in\mathbb{Q} \\ h(x)=2-x & ,x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}.$$

بين أن h غير متصلة إلا في نقطتين يجب تحديدهما.

تمرين SM 13

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\cos x-[x].$$

1. بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[x]}{x}=1$.
2. حدد $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

تمرين SM 14

بين أنه يمكن أن يكون لدينا fg متصلة في x_0 بينما f أو g غير متصلة في x_0.

تمرين SM 15

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 1 & ; \quad x\in\mathbb{Q}\end{cases}.$$

أدرس اتصال كل من الدالتين f و $f\circ f$. ماذا تستنتج؟

تمرين SM 16

لتكن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و معرفة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}^*$ بما يلي:

$$\left(\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad f(x+y)+f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}.$$

بين أن f ثابتة.

تمرين 17

حدد قيم البارامتر m لتكون الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\cdot\begin{cases}f(x)=x^3-3x+2 & ; \quad x\geq 0\\ f(x)=\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin(mx)\right)}{x^2} & ; \quad x<0\end{cases}$$

متصلة على $\mathbb{R}$.

ملاحظة: بالنسبة للعلوم الرياضياتية تعتبر النهايات المتعلقة بالجزء الصحيح خارج المقرر لكن يمكن استثمار هذه التمارين للتعود على الخاصيات المتعلقة بالجزء الصحيح إضافة إلى كونها أداة تمكن من إعطاء أمثلة لبعض الدوال الغير متصلة.