

مذكرة رقم 7 في دروس النهايات

الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
<p>– نهايات الدوال $x \rightarrow x^2$ و $x \rightarrow \sqrt{x}$ و $x \rightarrow x^3$ و $x \rightarrow x^n$ و نهايات مقlobات هذه الدوال في الصفر و $+\infty$ و $-\infty$؛</p> <p>– النهاية المنتهية و النهاية اللانتهية في نقطة</p> <p>– النهاية المنتهية و النهاية اللانتهية في $+\infty$ و $-\infty$؛</p> <p>– العمليات على النهايات؛</p> <p>– النهاية على اليمين؛ النهاية على اليسار؛</p> <p>– نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية؛</p> <p>نهاية دوال من الشكل: $\sqrt[n]{f}$ حيث f دالة اعتيادية؛</p> <p>– النهايات $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}$؛</p> <p>– النهايات و الترتيب؛</p>	<p>– حساب نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية و الدوال اللاجذرية؛</p> <p>– حساب نهايات الدوال المثلثية البسيطة باستعمال النهايات الاعتيادية.</p>	<p>– يتم تقديم مفهوم النهاية بطريقة حدسية من خلال سلوك الدوال المرجعية المحددة في البرنامج و مقlobاتها بجوار الصفر و $+\infty$ و $-\infty$ و يقبل هذه النهايات؛</p> <p>– يتم الاعتماد على خاصيات الترتيب في \mathbb{R} لحساب نهايات دوال بسيطة تحقق:</p> <p>* $f(x) - l \leq u(x)$ حيث u دالة نهايتها 0؛</p> <p>* $f(x) \geq u(x)$ حيث u دالة نهايتها $+\infty$؛</p> <p>* $f(x) \leq u(x)$ حيث u دالة نهايتها $-\infty$؛</p> <p>– تعتبر العمليات على النهايات المنتهية و اللانتهية مقبولة و ينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها.</p> <p>– ينبغي تعويد التلاميذ على إزالة الأشكال غير المحددة البسيطة.</p> <p>– إن أي دراسة نظرية لمفهوم النهاية تعتبر خارج المقرر.</p>

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ • إذا كان n زوجي

إذا كان n فردي

تمرين 2: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2014}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -7x^9$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2015}$

أجوبة: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 = +\infty$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2014} = +\infty$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -7x^9 = +\infty$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2015} = -\infty$

III. نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كالتالي: $f(x) = \frac{1}{x}$

املأ الجدول التالي :

x	10000	1000	10	1	0	-	-10	-100	-1000	-10000
$f(x)$										

نلاحظ أنه عندما تكبر x فإن $f(x)$ تقترب من الصفر

و نكتب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$

نلاحظ أنه عندما تصغر x فإن $f(x)$ تقترب من الصفر

نكتب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$

نهايات اعتيادية: • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ •

خاصية: لتكن f دالة عددية و l عددا حقيقيا

إذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فإن هذه النهاية وحيدة

تمرين 3: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3}$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5}$

I. نهاية منتهية لدالة نقطة

مثال 1: لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كالتالي: $f(x) = 2x$

الكتابة : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ نقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 ل $f(x)$

و لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$

نهايات اعتيادية: • $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$ • $\forall n \in \mathbb{N}^* \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$

تمرين 1: أحسب النهايات التالية :

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} (3+x-3x^2)$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-1}{3x^2-x}$

أجوبة: (1) $\lim_{x \rightarrow 1} 3+x-3x^2 = 3+(-1)-3(-1)^2 = 3+(-1)-3 = -1 = l$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-1}{3x^2-x} = \frac{5 \times 1 - 1}{3(-1)^2 - (-1)} = \frac{4}{3+1} = 1 = l$

II. نهاية غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كالتالي: $f(x) = x^2$

املأ الجدول التالي :

x	10000	1000	10	1	0	-	-10	-100	-1000	-10000
$f(x)$										

نلاحظ أنه عندما تكبر x فإن $f(x)$ تكبر أيضا نكتب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

نلاحظ أنه عندما تصغر x فإن $f(x)$ تكبر و نكتب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

نهايات اعتيادية: • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \forall n \in \mathbb{N}^*$ •

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x-4$	$-$	0	$+$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-4 = 0^+$ و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-8}{2x-4} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-8}{2x-4} = +\infty$ و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-4 = 0^-$

(2) $\lim_{x \rightarrow 3^+} x-4 = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} -2x+6 = 0$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-2x+6$	$+$	0	$-$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 3^+} -2x+6 = 0^-$ و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{-2x+6} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{-2x+6} = -\infty$ و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow 3^+} -2x+6 = 0^+$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-9}{-2x^2+3x-1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} x-9 = -8$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} -2x^2+3x-1 = 0$

ندرس إشارة $-2x^2+3x-1$

نلاحظ أن: 1 جذر للحدودية $-2x^2+3x-1$

اذن: هي تقبل القسمة على: $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية

نجد أن: $-2x^2+3x-1 = (x-1)(-2x+1)$

ومنه: $-2x^2+3x-1=0$ يعني $(x-1)(-2x+1)=0$ يعني $x=1$ أو $x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$1/2$	1	$+\infty$	
$-2x^2+3x-1$	$-$	0	$+$	0	$-$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-9}{-2x^2+3x-1} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-9}{-2x^2+3x-1} = +\infty$

(4) $\lim_{x \rightarrow -2^+} x+2 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -2^+} -5x^2+1 = -19$ لدينا $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-5x^2+1}{x+2}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-5x^2+1}{x+2} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-5x^2+1}{x+2} = -\infty$

(5) لدينا $\lim_{x \rightarrow 2^+} -2x+4 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} 5x-20 = -10$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2x+4$	$+$	0	$-$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4} = +\infty$

VI. العمليات على النهايات

في كل ما يلي a عدد حقيقي أو يساوي $+\infty$ أو $-\infty$ و l و l' عدنان حقيقيان وهذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

1. النهاية و الجمع:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x)$	$l'+l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

مثال: أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^7}$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^5}$ (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x^{2009}}$

(الأجوبة:) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^5} = 0^-$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^7} = 0^-$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^5} = 0^-$ (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x^{2009}} = 0^+$

IV. النهاية اللانهائية لدالة في نقطة

نهايات اعتيادية: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و تقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 على اليمين

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$ و تقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 على اليسار

تمرين 4: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x^3}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x^5}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12}{x^4}$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

(الأجوبة: 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x^3} = -\infty$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x^5} = +\infty$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12}{x^4} = -\infty$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}} = 0+7+\infty = +\infty$

V. النهاية على اليمين و النهاية على اليسار لدالة في نقطة

■ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين

فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ " أو " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ "

■ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليسار

فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ " أو " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ "

نهايات اعتيادية: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ • $\forall n \in \mathbb{N}^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

• إذا كان n زوجي غير منعدم, فإن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

• إذا كان n فردي غير منعدم, فإن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$

مثال: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6}$

أجوبة: $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x-6 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} 3x+1 = 9+1 = 10$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2x-6$	$-$	0	$+$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6} = +\infty$ و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x-6 = 0^+$

(2) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6} = -\infty$ و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x-6 = 0^-$

تمرين 5: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-8}{2x-4}$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-8}{2x-4}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-9}{-2x^2+3x-1}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-4}{-2x+6}$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{-2x+6}$

و $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4}$ (5) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-5x^2+1}{x+2}$ (4) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-9}{-2x^2+3x-1}$

أجوبة: (1) $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-4 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} 3x-8 = -2$

الجواب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 7 = 7$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

2. النهاية والضرب:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$	$l \cdot l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	تكل غير محدد	

أمثلة: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^4$ و (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) \times \frac{1}{x} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1)^{2008} \times (x^3 + 1)^{2009} \quad (3)$$

$$\text{أجوبة: (1) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^4 = 5 \times (+\infty) = +\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = +\infty - \infty = +\infty$$

$$\text{ندينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$$

$$\text{ومنه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = +\infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1)^{2008} \times (x^3 + 1)^{2009} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 1)^{2009} = -\infty \quad \text{ومنه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1)^{2008} \times (x^3 + 1)^{2009} = -\infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

$$\infty \times 0$$

$$\text{رفع ال ش غ م مثلا بالنشر: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty + 0 = +\infty$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$+\infty - \infty$$

$$\text{رفع ال ش غ م مثلا بالتعميل: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = +\infty$$

3. النهاية والمقلوب:

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\frac{1}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

أمثلة: أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+7} + \frac{1}{x^2}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x+7} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\text{أجوبة: (1) ندينا: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x+7} = \frac{1}{7}$$

$$\text{ومنه: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x+7} + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+7} + \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+7} = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0^+ \quad \text{ومنه: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

4. النهاية والخارج:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\neq 0$	0	0	0	0^+	0^+	0^-	0^-	< 0	< 0	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	تكل غير محدد

أمثلة: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-5}{|x-4|}$ و (2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

$$\text{أجوبة: (1) ندينا: } \lim_{x \rightarrow 1} 4x - 5 = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} |x - 4| = 3$$

$$\text{ومنه: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-5}{|x-4|} = -\frac{1}{3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4 = 0 \quad \text{ندينا:}$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x+2 = 4$$

$$\text{تمرين 6: أحسب النهايات التالية: (1) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-9} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2} \quad (5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-2x-3}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+x^2-3}{2x^2+x-3} \quad (7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x-2} \quad (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9}{\sqrt{x}}$$

$$\text{أجوبة: (1) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-9} = 0 \quad \text{ندينا: } \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 3} x - 3 = 0$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3^2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} x+3 = 6$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1} = 0 \quad \text{ندينا: } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 4x^2 - 1 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 2x - 1 = 0$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x)^2-1^2}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 2x+1 = 2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-2x-3} = 0 \quad \text{ندينا: } \lim_{x \rightarrow 3} x - 3 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3 = 0$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\text{نلاحظ أن: } 3 \text{ جذر للحدودية } x^2 - 2x - 3$$

$$\text{اذن: هي تقبل القسمة على: } x - 3$$

$$\text{وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن: } x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-2x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{4}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3} = 0 \quad \text{ندينا: } \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2x - 3 = 0$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\text{نلاحظ أن: } 1 \text{ جذر للحدودية } 2x^2 - 5x + 3 \text{ و } 2x^2 - 5x + 3$$

$$\text{اذن: الحدوديتان تقبلان القسمة على: } x - 1$$

$$\text{وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن: } 2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$$

$$\text{وأن: } x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x+3} = \frac{-1}{4}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2} = 0 \quad \text{ندينا: } \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 - 5x - 2 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\text{نلاحظ أن: } 2 \text{ جذر للحدودية } 3x^2 - 5x - 2 \text{ و } 3x^2 - 5x - 2$$

$$\text{اذن: الحدوديتان تقبلان القسمة على: } x - 2$$

$$\text{وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن:}$$

$$3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x+1) \quad \text{وأن: } 2x^2 - 5x + 2 = (x-2)(2x+1)$$

7. نهاية الدوال اللاجزئية

خاصية: إن تكن f دالة عددية معرفة على مجال على الشكل

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; +\infty[\quad \text{بحيث} \quad [a; +\infty[$$

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $l \geq 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

• إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $l \geq 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

أمثلة: (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x^2 + 4}$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+7}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

أجوبة: (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x^2 + 4} = \sqrt{3 \times 2^2 + 4} = \sqrt{16} = 4$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+7} = +\infty$ لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+7 = +\infty$ إذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+7} = +\infty$

(3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ لدينا $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1}-1 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2} x-2 = 0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1})^2 - 1^2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{2}$$

تمرين 8: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 - 5x + 1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-5x+7}$ (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x\sqrt{6x^2+x-4}$ (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-2x}{\sqrt{x}-1}$ (7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$

(8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x}{\sqrt{x}-2-1}$ (9) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$

أجوبة: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 - 5x + 1} = +\infty$ لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 5x + 1 = +\infty$

إذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 - 5x + 1} = +\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-5x+7} = +\infty$ لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x+7 = +\infty$ إذن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-5x+7} = +\infty$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x\sqrt{6x^2+x-4} = -\infty$ لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{6x^2+x-4} = +\infty$

إذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x\sqrt{6x^2+x-4} = -\infty$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ لدينا $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}-1 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

(5) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ لدينا $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}-2 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 4} x-4 = 0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{2x-1} = \frac{7}{3}$$

(6) $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + x - 3 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^3 + x^2 - 3 = 0$ لدينا: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{2x^2 + x - 3}$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلاً بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن: 1 جذر للحدودية $2x^3 + x^2 - 3$ و $2x^2 + x - 3$ للحدودية

إذن: الحدوديتان تقبلان القسمة على: $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن:

$$2x^2 + x - 3 = (x-1)(2x+3) \quad \text{وأن} \quad 2x^3 + x^2 - 3 = (x-1)(2x^2 + 3x + 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{2x^2 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 + 3x + 3)}{(x-1)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x + 3}{2x+3} = \frac{8}{5}$$

(7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$ لدينا $\lim_{x \rightarrow 2} x^4 - 16 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلاً بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2^4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2)^2 - (2^2)^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2^2)(x^2 + 2^2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2 + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(x^2 + 4) = 32$$

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0^+$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{\sqrt{x}} = -\infty$

5. نهاية الدالة الحدودية

نهاية دالة حدودية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$

هي نهاية حدها الأكبر درجة

مثال: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x - 4$

الحواب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$

6. نهاية الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$

هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة.

مثال: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^2 + 1}{x^4 + x - 4}$

الحواب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^2 + 1}{x^4 + x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$

تمرين 7: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 5x - 9x^2$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^5 + 3x^2 + x}{-10x^5 - x - 1}$ (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 - 4x + 12)$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{20x^3 - 7x^2 + x}{10x^4 - 3x - 6}$ (5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^6 + 2x^2 + 1}{x^3 + 3x - 1}$

(6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{(x-1)^2}$ (7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + 4x^2 + 1}{x^8 - x + 3}$

أجوبة: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 5x - 9x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -9x^2 = -\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 - 4x + 12 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 = +\infty$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^5 + 3x^2 + x}{-10x^5 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^5}{-10x^5} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^6 + 2x^2 + 1}{x^3 + 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^6}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 = +\infty$

(5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{20x^3 - 7x^2 + x}{10x^4 - 3x - 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{20x^3}{10x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{20}{10x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0^-$

(6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + 4x^2 + 1}{x^8 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5}{x^8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = 0^+$

(7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$x-4$	$-$	0	$+$

$$\begin{cases} f(x)=x+4, x>4 \\ f(x)=-(x+4), x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}, x>4 \\ f(x)=\frac{(x+4)(x-4)}{-(x-4)}, x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}, x>4 \\ f(x)=\frac{x^2-16}{-(x-4)}, x<4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} -(x+4) = -8 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} x+4 = 8$$

(2) نلاحظ أن: $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ ومنه

الدالة f لا تقبل نهاية عند: $x_0 = 4$

تمرين 10: تعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \frac{|x|}{x} + x^4$

1. أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند: $x_0 = 0$ ؟

أجوبة:

$$\begin{cases} f(x)=1+x^4, x>0 \\ f(x)=-1+x^4, x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=\frac{x}{x}+x^4, x>0 \\ f(x)=-\frac{x}{x}+x^4, x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1+x^4 = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1+x^4 = -1$$

(2) نلاحظ أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

ومنه لدالة f لا تقبل نهاية عند: $x_0 = 0$

8. نهاية الدوال المثلثية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \bullet \quad \text{خاصيات:}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad \bullet$$

أمثلة: أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 4x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\tan 3x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (1) \quad \text{أجوبة:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \times \frac{6x}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \times \frac{3x}{\tan 3x} \times 2 = 1 \times 1 \times 2 = 2 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{2x}{4x} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \quad (1) \quad \text{أحسب النهايات التالية:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 10x}{\sin 5x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} \quad (2)$$

$$-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times 3 = 1 \times 3 = 3 \quad (1) \quad \text{أجوبة:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{\tan x} = 1 \times 1 = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 10x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 10x}{10x} \times \frac{5x}{\sin 5x} \times \frac{10x}{5x} = 1 \times 1 \times 2 = 2 \quad (3)$$

9. النهايات والترتيب

خاصيات: لتكن I مجالاً من نوع $[a, +\infty[$ حيث $a \in \mathbb{R}$ و $l \in \mathbb{R}$

لتكن f و U و V دوال عددية معرفة على المجال I إذا

■ إذا كانت $U(x) \leq f(x) \leq V(x) \quad \forall x \in I$ وكانت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-2x}{\sqrt{x-1}} = -\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0^+ \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} 1-2x = -1 \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x+3 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 3} 1-\sqrt{x+4} = 0: \quad \text{لدينا:} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3} \quad (7)$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب بالمرافق ثم بالاختزال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(1-\sqrt{x+4})}{(x+3)(1+\sqrt{x+4})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1^2 - (\sqrt{x+4})^2}{(x+3)(1+\sqrt{x+4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x-3}{(x+3)(1+\sqrt{x+4})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x+3)}{(x+3)(1+\sqrt{x+4})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{1+\sqrt{x+4}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x-2} - 1 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 3x = 0: \quad \text{لدينا:} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x-2} - 1} \quad (8)$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب بالمرافق ثم بالاختزال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x-2} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{x-2}-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{((\sqrt{x-2})^2 - 1^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} x(\sqrt{x-2}+1) = 6 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} x - 5 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 5} 2 - \sqrt{x-1} = 0: \quad \text{لدينا:} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} \quad (9)$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب بالمرافق ثم بالاختزال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2 - \sqrt{x-1})(2 + \sqrt{x-1})}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2^2 - (\sqrt{x-1})^2}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-1}{2 + \sqrt{x-1}} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

مبرهنة: لتكن f دالة عددية و l و a عددين حقيقيين

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \quad \text{يكافئ} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x-1|}$

1. أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند: $x_0 = 1$ ؟

أجوبة: (1) ندرس إشارة $x-1$: $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

$$\begin{cases} f(x)=x+1, x>1 \\ f(x)=-(x+1), x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}, x>1 \\ f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}, x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, x>1 \\ f(x)=\frac{x^2-1}{-(x-1)}, x<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -(x+1) = -2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x+1 = 2$$

(2) نلاحظ أن: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ومنه لدالة f

لا تقبل نهاية عند: $x_0 = 1$

تمرين 9: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \frac{x^2 - 16}{|x-4|}$

1. أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند: $x_0 = 4$ ؟

أجوبة: (1) ندرس إشارة $x-4$: $x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0: \text{ لأن } = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right) = +\infty \times (-1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty: \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x \quad (2)$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $+\infty - \infty$:
نتخلص من ال ش غ م بالضرب بالمرافق:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = +\infty: \text{ لأن } = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 4} = +\infty: \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 4} + 3x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 4} + 3x = +\infty \text{ ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 4} = +\infty: \text{ لدينا } (3)$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $+\infty - \infty$:
نتخلص من ال ش غ م بالتعميل ب x^2 داخل الجذر مربع:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 4} + 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right)} + 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 3x$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x: \text{ فان } x \rightarrow -\infty: \text{ ولدينا } \sqrt{x^2} = |x|: \text{ ولدينا } = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 3x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 4} + 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} + 3x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0: \text{ لأن } = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 3 \right) = +\infty \times (-2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty: \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (4)$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $+\infty - \infty$:
نتخلص من ال ش غ م بالضرب بالمرافق:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - x^2}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = +\infty$$

دائما نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{\infty}{\infty}$

نعمل ب x^2 داخل الجذر مربع وب x في البسط ونجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} + x \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty: \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (5)$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{\infty}{\infty}$

إذا كانت $\forall x \in I f(x) \leq V(x)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = -\infty$

$$\text{فان } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

إذا كانت $\forall x \in I U(x) \leq f(x) \leq V(x)$ وكانت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = l \text{ فان } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

مثال 1: أحسب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sin(x)$

الجواب: نعلم أن: $\forall x \in \mathbb{R} -1 \leq \sin x \leq 1$

اذن: $2x - 1 \leq \sin x + 2x \leq 2x + 1$

ونعلم أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sin(x) = +\infty$

مثال 2: أحسب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^2 + \cos x$

الجواب: نعلم أن: $\forall x \in \mathbb{R} -1 \leq \cos x \leq 1$

اذن: $-4x^2 - 1 \leq -4x^2 + \cos x \leq -4x^2 + 1$

ونعلم أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^2 - 1 = -\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^2 + \cos x = -\infty$

مثال 3: أحسب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

الجواب: نعلم أن: $\forall x \in \mathbb{R} -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

اذن: $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$ ولدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$

$$\text{ومنه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

تمرين 12: أحسب النهايات التالية:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{3 - \sin x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \cos x}$$

الجواب (1): نعلم أن: $\forall x \in \mathbb{R} -1 \leq \cos x \leq 1$ اذن: $-1 \leq -\cos x \leq 1$

اذن: $\frac{x}{3} \leq \frac{x}{2 - \cos x} \leq \frac{x}{1}$ اذن: $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$

اذن: $\frac{x}{3} \leq \frac{x}{2 - \cos x} \leq x$ ونعلم أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \cos x} = +\infty$

الجواب (2): نعلم أن: $\forall x \in \mathbb{R} -1 \leq \sin x \leq 1$ اذن: $-1 \leq -\sin x \leq 1$

اذن: $\frac{x^3}{4} \leq \frac{x^3}{3 - \sin x} \leq \frac{x^3}{2}$ اذن: $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \sin x} \leq \frac{1}{2}$

اذن: $\frac{x^3}{3 - \sin x} \leq \frac{x^3}{2}$ ونعلم أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2} = +\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3 - \sin x} = +\infty$

تمرين 13: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} - 2x$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 4} + 3x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

الجواب (1): $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} - 2x$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} = +\infty$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $+\infty - \infty$

نتخلص من ال ش غ م بالتعميل ب x^2 داخل الجذر مربع:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2 \right) \text{ لأن } \sqrt{x^2} = |x| \text{ وبما أن } x \rightarrow +\infty: \text{ فان } \sqrt{x^2} = |x| = x$$

$$\text{ومنه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2 \right) =$$

نعمل ب x^2 داخل الجذر مربع وب x في البسط ونجد :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}$$

لأن $\sqrt{x^2} = |x| = x$ وبما أن $x \rightarrow +\infty$ فان $\sqrt{x^2} = |x| = x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ : لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1-0}{\sqrt{1+0}} = 1$$

تمرين 14: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x+1}, x \geq -1 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3}{x}, x < -1 \end{cases}$$

1. أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند $x_0 = -1$ ؟

الجواب: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} x+1 = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 4x + 3 = 0 \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{x+1}$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلاً بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن -1 جذر للحدودية $x^2 + 4x + 3$

اذن : هي تقبل القسمة على $x+1$:

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+3)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} x+3 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 3}{x} = \frac{1-3}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

(2) نعم الدالة f تقبل نهاية عند $x_0 = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 \text{ : لأنه } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$$

تمارين للبحث:

تمرين 1: أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 2x^2 + 1}{x^4 + 3x - 1} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^5 + 3x^2 + x}{-10x^5 - x - 1} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x+1}{x^2-x-2} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x+1}{x^2-x-2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3} \quad (5)$$

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}; x \geq 0 \\ f(x) = x^3; x < 0 \end{cases}$$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

2. استنتج : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

تمرين 3: أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 - x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5x^2 + x - 1} - 2x + 1 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x - 1} + x \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5x^2 + x - 1} + 2x + 1 \quad (5)$$

تمرين 4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - \frac{1}{8}; x > \frac{1}{2} \\ f(x) = 1 - 2x; x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$$