المرجـــح

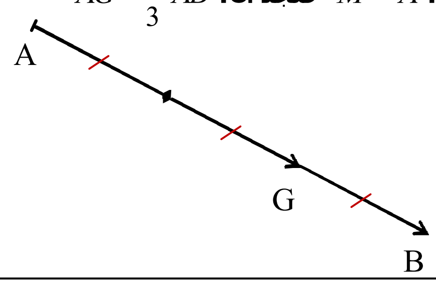
تمرين 1

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



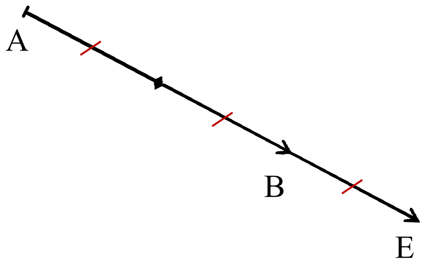
: إذا أخذنا : $M=B$ سنجد أن $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ ، لكننا سنجد G في نفس الموضع

E مرجح النقطتين المتزنتين $(A,-1)$ و $(B,3)$

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

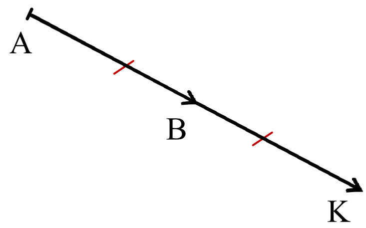


K مرجح النقطتين المتزنتين $(A,-1)$ و $(B,2)$

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح:

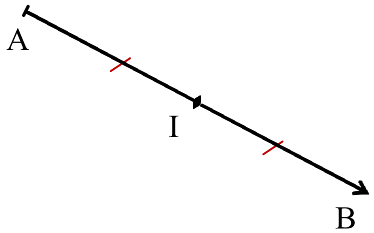
$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MK}=\frac{-1}{1}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{1}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$



I مرجح النقطتين المتزنتين $(A,100)$ و $(B,100)$

بما أن المعاملان متساويان إذن I منتصف القطعة $[AB]$



: مرجح نقطتين لهما نفس المعامل هو منتصف القطعة التي تصلهما

: لإيجاد علاقة متجهية تسمح بالإنشاء يمكن أيضا استعمال تعريف المرجح، لكن هذه الطريقة تتطلب في الغالب استعمال علاقة شال للحصول على المتساويات السابقة.

تمرين 2

1

لدينا G مرجح النقط المتزنة $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,3)$

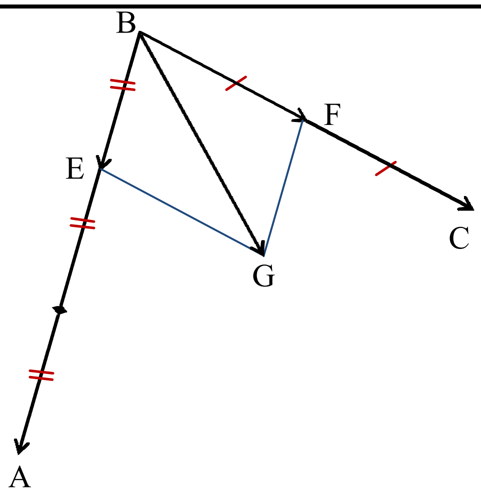
إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MG}=\frac{2}{6}\overrightarrow{GA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{GB}+\frac{3}{6}\overrightarrow{GC}$$

نأخذ : $M=B$ فنجد : $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

: لأجل الإنشاء أنشأنا أولا النقطة E حيث $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ ثم النقطة F حيث $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ثم أنشأنا G حيث :

$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}$ أي $BEGF$ متوازي الأضلاع



تمرين 2

لتكن K مرجح النقط المتزنة $(A,2)$ و $(B,1)$

بما أن G مرجح $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,3)$

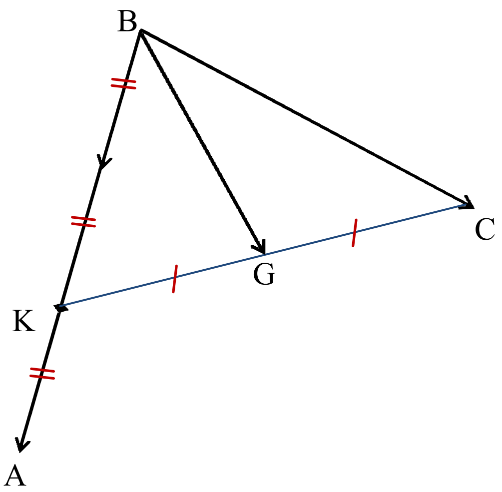
إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح $(K,3)$ و $(C,3)$

أي منتصف $[CK]$

2 لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M \in (P)\ \overrightarrow{MK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ : $M = B$ فنجد : $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

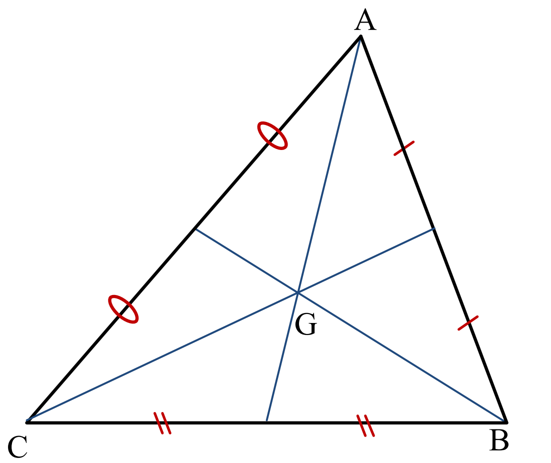


: لاحظ أنه رغم اختلاف الطريقتين إلا أن موضع النقطة G لا يتغير.

تمرين 3

بما أن G مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$

فإن G تمثل مركز ثقل المثلث ABC أي نقطة تقاطع متوسطاته



: مرجح ثلاث نقط لها نفس المعامل يكون هو مركز ثقل المثلث الذي رؤوسه هذه النقط.

تمرين 4

لنبين أن بين أن O هو مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

أي لنبين أن: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

لدينا : $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O إذن O هي منتصف قطريه $[AC]$ و $[BD]$

منه : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ و $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ بالتالي : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} + \vec{0} =$

: الشكل غير ضروري لكنه قد يساعد على إيجاد الفكرة.

تمرين 5

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$

1 بين أن A مرجح النقطتين المتزنتين $(G,-3)$ و $(B,1)$ أي نبين : $-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$ منه : $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ منه $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

منه : $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ بالتالي : $-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

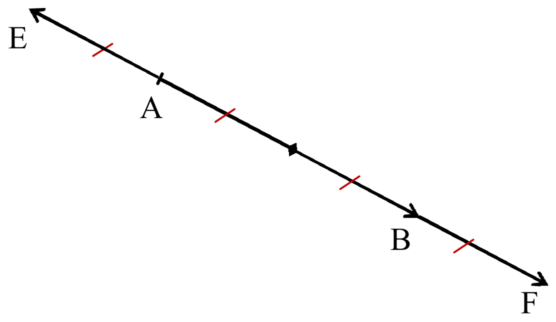
2 بين أن B مرجح النقطتين المتزنتين $(G,-6)$ و $(A,4)$ أي نبين : $-6\overrightarrow{BG}+4\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$ منه : $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ منه $2(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

منه : $2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ منه $3\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ منه $-3\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ بالتالي : $-6\overrightarrow{BG}+4\overrightarrow{BA}=2\vec{0}=\vec{0}$

: الشكل غير ضروري لكنه قد يساعد على إيجاد الفكرة.

تمرين 6



1 لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(A,3)$ و $(B,-1)$ ،

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{-1}{2}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AE}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$

2 لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,-3)$ ،

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{1}{-2}\overrightarrow{MA}+\frac{-3}{-2}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

3 لتكن : I منتصف $[AB]$ و لنبين أن I هي أيضا منتصف $[EF]$ أي لنبين أن $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\vec{0}$

الطريقة الأولى:

لدينا : $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{IA}+\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

بالتالي للقطعتين $[AB]$ و $[EF]$ نفس المنتصف .

الطريقة الثانية:

باستعمال الخاصية المميزة للمرجح بالنسبة لـ $M=I$ المستعملة في السؤالين السابقين نجد أن:

$\overrightarrow{IE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{IA}+\frac{-1}{2}\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{IF}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{IA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{IB}$ منه : $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\left(\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}\right)\overrightarrow{IA}+\left(\frac{3}{2}+\frac{-1}{2}\right)\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

بالتالي للقطعتين $[AB]$ و $[EF]$ نفس المنتصف .

: الخاصية المميزة للمرجح مفيدة في إنشاء المرجح و في كثير من البراهين.

تمرين 7

1

لدينا I مرجح النقطتين المتزنتين $(A,1)$ و $(B,2)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

لدينا J مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(A,1)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{MA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{MC}$$

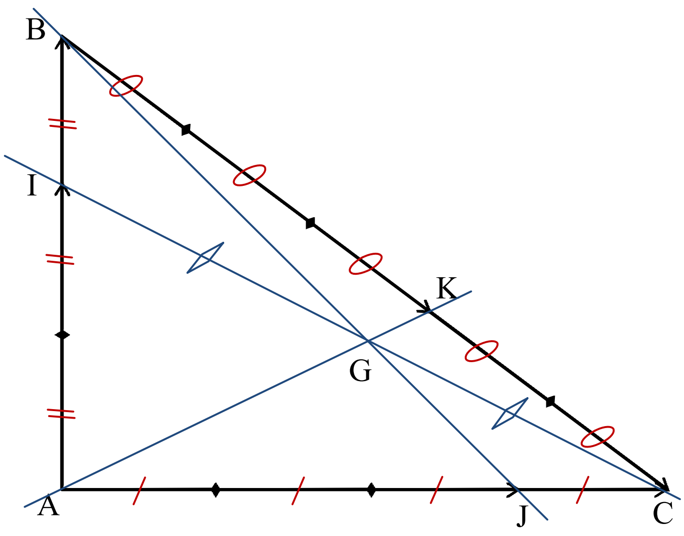
نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

لدينا K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{MB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{MC}$$

نأخذ: $M=A$ فنجد أن: $\overrightarrow{BK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$



2

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و I مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(B,2)$

إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(I,3)$ و $(C,3)$ أي أن G منتصف $[IC]$

3

بين أن المستقيمات (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و J مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(A,1)$

إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(B,2)$ و $(J,4)$ إذن $G\in(BJ)$

لدينا G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و K مرجح النقطتين المتزنتين $(B,2)$ و $(C,3)$

إذن حسب خاصية التجميعية فإن G مرجح النقط $(A,1)$ و $(K,5)$ إذن $G\in(AK)$

و حسب السؤال السابق $G\in(IC)$

بالتالي : المستقيمات (CI) و (BJ) و (AK) متلاقية في G

: خاصية التجميعية مفيدة في كثير من البراهين حيث تكون كافية للبرهان عن الاستقامية لأن مرجح نقطتين تكون مستقيمية مع هتين النقطتين.

تمرين 8

$2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{DE}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$		
1	لدينا $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ منه : D مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$	2 لدينا $\overrightarrow{DE}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ منه : $-\overrightarrow{ED}+3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ منه : E مرجح النقطتين $(D,-1)$ و $(C,3)$
3	لنبين أن النقطة C مرجح النظمة المتزنة $\{(A,2);(B,1);(E,6)\}$: أي لنبين أن : $2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+6\overrightarrow{CE}=\vec{0}$ لدينا E مرجح النقطتين $(D,-1)$ و $(C,3)$ منه : $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{MD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{MC}$ نأخذ: $M=C$ فنجد أن: $\overrightarrow{CE}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{CD}$ (1) و لدينا D مرجح النقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$ منه : $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ نأخذ: $M=C$ فنجد أن: $\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ (2) من (1) و (2) نستنتج أن : $\overrightarrow{CE}=\frac{-1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)$ أي : $\overrightarrow{CE}=\frac{-2}{6}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$ أي : $6\overrightarrow{CE}=-2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$ بالتالي : $2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+6\overrightarrow{CE}=\vec{0}$	
	: يمكن أيضا استعمال علاقة شال باستعمال المعطيات مباشرة ، لكن الأمر يتطلب استعمال متساويات كثيرة، لذلك استعمال الخاصية المميزة يسمح باختصار الوقت.	
4	لنبين أن النقط B و C و H مستقيمية . لدينا H مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(E,3)$ إذن حسب خاصية الصمود H مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(E,6)$ و بما أن C مرجح $(A,2);(B,1);(E,6)$: فحسب خاصية التجميعية C مرجح $(H,8);(B,1)$: بالتالي النقط B و C و H مستقيمية .	
	: للبرهان على الاستقامية يمكن البرهان على أن إحدى النقط الثلاث مرجح باقي النقطتين. الشكل غير مطلوب ، لذلك لم يتم رسم أي شكل	

تمرين 9

O منتصف $[BC]$ و H مرجح $\{(C,2);(B,2);(A,-1)\}$	
1	لنبين أن $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}$ لدينا : H مرجح $(C,2);(B,2);(A,-1)$ إذن $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MC}$ نأخذ: $M=O$ فنجد أن: $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$ منه : $\overrightarrow{OH}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}$ (لأن $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ لكون O منتصف $[BC]$)
	: لم يتم رسم الشكل لكونه لا يتضمن الجديد

2	لنبين أن النقطة O منتصف القطعة $[HG]$ أي نبين أن : $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}$ لدينا G مركز ثقل المثلث ABC إذن G مرجح $(A,1);(B,1);(C,1)$ إذن : $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$ نأخذ : $M=O$ نجد : $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ بالتالي: $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OG}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\vec{0}$

تمرين 10

1

لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,1)$ و $(B,2)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$$

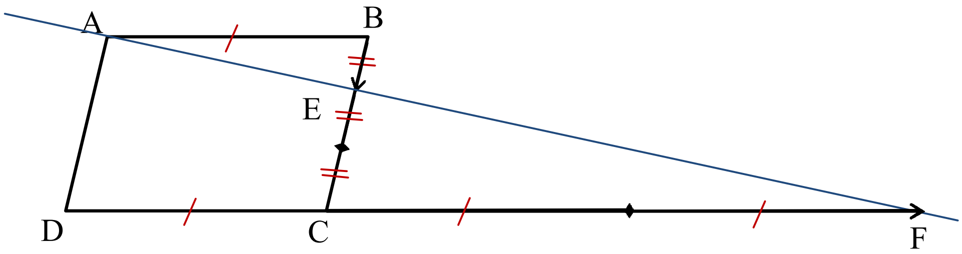
نأخذ: $M=B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(C,3)$ و $(D,-2)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{3}{1}\overrightarrow{MC}+\frac{-2}{1}\overrightarrow{MD}$$

نأخذ: $M=D$ فنجد أن: $\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{DC}$



2

لنبين أن A مرجح النقطتين المتزنتين $(E,3)$ و $(F,-1)$ أي نبين : $3\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\vec{0}$

لدينا:

$$3\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right)-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DF}=$$

$$=3\overrightarrow{DC}+3\times\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{DC}$$

$$=\vec{0}$$

3

نستنتج أن النقط A و E و F مستقيمية.

تمرين 11

1

لدينا E مرجح النقطتين المتزنتين $(C,-3)$ و $(B,1)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{-3}{-2}\overrightarrow{MC}+\frac{1}{-2}\overrightarrow{MB}$$

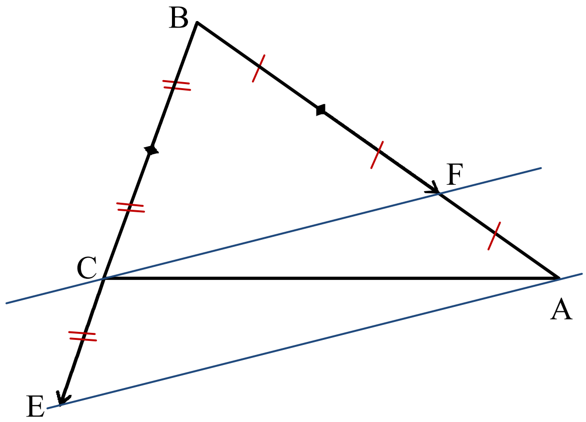
نأخذ: $M=B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

لدينا F مرجح النقطتين المتزنتين $(A,2)$ و $(B,1)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$$

نأخذ: $M=B$ فنجد أن: $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$



2

لنبين أن $(CF)//(AE)$

لدينا: $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ منه $\overrightarrow{BA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BF}$ منه : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{FB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{FC}$

بالتالي $(CF)//(AE)$

تمرين 12

1

لدينا E مركز ثقل المثلث ABC أي مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$

لدينا F مركز ثقل المثلث ADC أي مرجح النقط $(A,1)$ و $(D,1)$ و $(C,1)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$(*)\ \forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$$

لنبين أن $(EF)//(BD)$

نأخذ في المتساوية $(*)$: $M=E$ فنجد أن: $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EC}\right)$

و بما أن E مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ فإن : $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ أي : $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DE}$

منه: $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

بالتالي : $(EF)//(BD)$

: الشكل غير ضروري لكنه يساعد في إيجال الفكرة أحيانا.

تمرين 13

1

- لدينا $\overrightarrow{AE}=\frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}$ منه : $5\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{AB}$ منه : $5\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ منه : $5\overrightarrow{AE}+2\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}\right)=\vec{0}$

منه : $5\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ منه : $7\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ منه: $-7\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$

هذا يعني أن E مرجح النقطتين $(A,-7)$ و $(B,2)$

- لدينا I منتصف $[BC]$ إذن I مرجح النقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$

- لدينا $\overrightarrow{CF}=\frac{7}{9}\overrightarrow{CA}$ منه $9\overrightarrow{CF}=7\overrightarrow{CA}$ منه : $9\overrightarrow{CF}-7\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ منه : $9\overrightarrow{CF}-7\left(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FA}\right)=\vec{0}$

منه : $9\overrightarrow{CF}-7\overrightarrow{CF}-7\overrightarrow{FA}=\vec{0}$ منه : $2\overrightarrow{CF}-7\overrightarrow{FA}=\vec{0}$ منه: $-2\overrightarrow{FC}-7\overrightarrow{FA}=\vec{0}$

هذا يعني أن E مرجح النقطتين $(C,-2)$ و $(A,-7)$ (أو أيضا $(C,2)$ و $(A,7)$ خاصية الصمود)

2

لنبين أن النقط E و I و F مستقيمية.

لدينا E مرجح $(A,-7)$ و $(B,2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{ME}=\frac{-7}{-5}\overrightarrow{MA}+\frac{2}{-5}\overrightarrow{MB}$

لدينا F مرجح $(C,2)$ و $(A,7)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M\in(P)\ \overrightarrow{MF}=\frac{2}{9}\overrightarrow{MC}+\frac{7}{9}\overrightarrow{MA}$

نأخذ: $M=I$ فنجد أن: $\overrightarrow{IE}=\frac{7}{5}\overrightarrow{IA}-\frac{2}{5}\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{IF}=\frac{2}{9}\overrightarrow{IC}+\frac{7}{9}\overrightarrow{IA}$

و لدينا I منتصف $[BC]$ منه : $\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IB}$ منه : $\overrightarrow{IF}=\frac{-2}{9}\overrightarrow{IB}+\frac{7}{9}\overrightarrow{IA}$

إذن : $9\overrightarrow{IF}=-2\overrightarrow{IB}+7\overrightarrow{IA}$ و $5\overrightarrow{IE}=7\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}$ منه : $9\overrightarrow{IF}=5\overrightarrow{IE}$ أي $\overrightarrow{IF}=\frac{5}{9}\overrightarrow{IE}$

بالتالي : النقط E و I و F مستقيمية.

: الشكل غير ضروري لكنه يساعد في إيجال الفكرة أحيانا.

تمرين 14

$A(3,4)$ و $B(0,2)$ و $C(3,2)$

1

لدينا E منتصف $[BC]$ منه : $\begin{cases} x_E=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{3}{2} \\ y_E=\dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \end{cases}$ منه: $E\left(\frac{3}{2};2\right)$

لدينا: G مرجح $(E,2)$ و $(A,1)$ منه : $\begin{cases} x_G=\dfrac{2x_E+x_A}{3}=\dfrac{3+3}{3}=2 \\ y_G=\dfrac{2y_E+y_A}{3}=\dfrac{4+4}{3}=\dfrac{8}{3} \end{cases}$ منه: $G\left(2;\frac{8}{3}\right)$

2

لدينا: $\overrightarrow{OE}\left(\frac{3}{2};2\right)$ و $\overrightarrow{OG}\left(2;\frac{8}{3}\right)$ و لدينا : $\det\left(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OE}\right)=\begin{vmatrix} 2 & \frac{8}{3} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix}=2\times2-\frac{8}{3}\times\frac{3}{2}=4-4=0$

بالتالي : O و G و C مستقيمية.

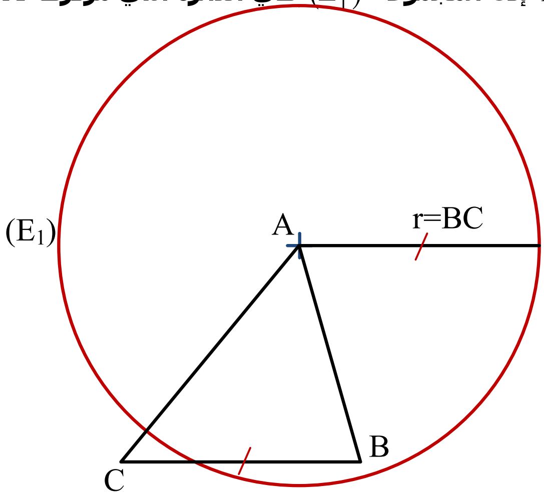
تذكير: إحداثيتا مرجح (A,α) و (B,β) و ... و (K,λ) هي : $\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha\, x_A+\beta\, x_B+\ldots+\lambda\, x_K}{\alpha+\beta+\ldots+\lambda} \\ y_G=\dfrac{\alpha\, y_A+\beta\, y_B+\ldots+\lambda\, y_K}{\alpha+\beta+\ldots+\lambda} \end{cases}$

تمرين 15

1

لنحدد (E_1) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

لدينا : $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ تعني : $AM = BC$ إذن المجموعة (E_1) هي الدائرة التي مركزها A و شعاعها $R = BC$

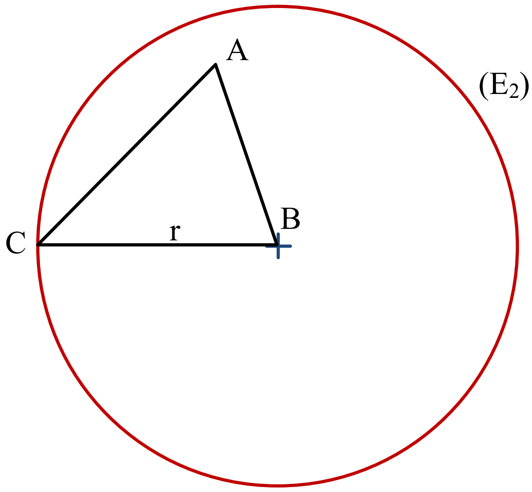


2

لنحدد (E_2) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{BM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|$

لدينا : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ منه : $\left\|\overrightarrow{BM}\right\| = \left\|\overrightarrow{CB}\right\|$ أي : $BM = BC$

بالتالي المجموعة (E_2) هي الدائرة التي مركزها B و شعاعها $R = BC$



تمرين 15

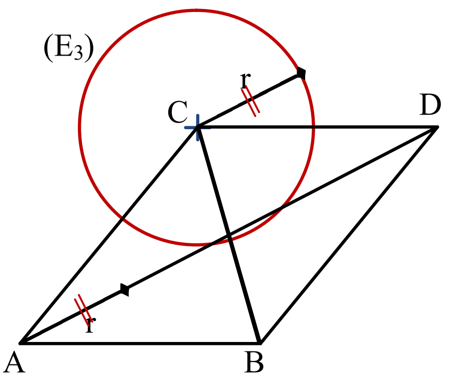
3

لنحدد (E_1) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|4\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|$

نعتبر النقطة D حيث $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ (أي $ABDC$ متوازي أضلاع)

منه : $\|4\overrightarrow{CM}\|=\|\overrightarrow{AD}\|$ أي : $4CM=AD$ أي : $CM=\dfrac{AD}{4}$

بالتالي المجموعة (E_3) هي الدائرة التي مركزها C و شعاعها $R=\dfrac{AD}{4}$



تمرين 16

1

لنحدد (ζ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=6$

نعتبر النقطة G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ (أي مركز ثقل المثلث ABC)

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M\in(P)\ 3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

منه : $\|3\overrightarrow{MG}\|=6$ أي $3MG=6$ أي $MG=2$

بالتالي (ζ) هي الدائرة التي مركزها G و شعاعها $r=2$

2

لنحدد (Δ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

نعتبر النقطة I مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ (أي منتصف $[AB]$)

و النقطة J مرجح النقط $(B,1)$ و $(C,1)$ (أي منتصف $[BC]$)

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M\in(P)\ 2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ و $\forall M\in(P)\ 2\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

منه : $\|2\overrightarrow{MI}\|=\|2\overrightarrow{MJ}\|$ أي $2MI=2MJ$ أي $MI=MJ$

بالتالي (Δ) هو واسط القطعة $[IJ]$

3

لنحدد (L) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$

نعتبر النقطة G مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(B,3)$

لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M\in(P)\ 4\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$

منه : $\|4\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM}\|$ أي $\|4\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{CB}\|$ أي $MG=\dfrac{BC}{2}$

بالتالي (L) هي الدائرة التي مركزها G و شعاعها $r=\dfrac{BC}{2}$

: لم يتم رسم الأشكال نظرا لكوننا تطرقنا لها في التمرين السابق.

لا حظ أننا ستعمل المرجح لكي يتم تبسيط المجموع المتجهي داخل رمز المنظم، لكن و في حال كان مجموع المعاملات منعدما(كما هو الحال في المثال الأخير فإنه يكون ممكنا تبسيط هذا التعبير دون استعمال المرجح)