مذكرة رقم 6 في درس الحساب المثلثي (ملخص)

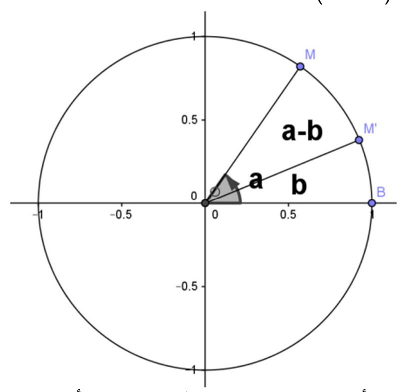
الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- صيغ التحويل؛ - تحويل الصيغة $a\cos x+b\sin x$	- التمكن من مختلف صيغ التحويل؛ - التمكن من حل معادلات ومتراجحات مثلثية تؤول في حلها إلى المعادلات والمتراجحات الأساسية؛ - التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية.	- ينبغي توخي البساطة في تقديم هذا الفصل وذلك باستعمال أي تقنية في متناول التلاميذ؛ - يتم توظيف الدائرة المثلثية لحل متراجحات مثلثية بسيطة على مجال من IR.

I. صيغ التحويل

(C) دائرة مثلثية مركزها O

$(0;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم



a أفصول منحنى للنقطة M و b أفصول منحنى للنقطة M'

$\overrightarrow{OM}(\cos a;\sin a)$ و $\overrightarrow{OM'}(\cos b;\sin b)$

❶ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

❷ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\|\overrightarrow{OM}\|\|\overrightarrow{OM'}\|\cos(a-b)=\cos(a-b)$

من : ❶ و ❷ نستنتج : ① $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

يمكن أن نبين أيضا أن :

② $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

③ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

④ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

مثال: أحسب $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

أجوبة: $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{4\pi-3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

يمكننا استعمال نتائج الجدول التالي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

④ $\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$

$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

تابع صيغ أخرى:

$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$

نقسم البسط والمقام على _$\cos a\cos b$ فنجد:

$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}=\frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{\sin b\cos a}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}$

⑤ $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}$

ويمكننا أيضا أن نبين أن : ⑥ $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}$

مثال: أحسب $\tan\frac{\pi}{12}$

الجواب: $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\times\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$

$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

تمرين 1 :

1. أحسب $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$ و $\tan\frac{5\pi}{12}$
2. أحسب $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$ و $\tan\frac{7\pi}{12}$
3. بين أن : $\cos x=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

أجوبة: (1 $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{2\pi+3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

④ $\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}$

$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}{\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{\sqrt6-\sqrt2}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{6-2}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{4}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{4}=\frac{8+2\sqrt{12}}{4}=\frac{8+4\sqrt3}{4}=2+\sqrt3$$

(2 $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{4\pi+3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{4}-\frac{\sqrt6}{4}=\frac{\sqrt2-\sqrt6}{4}$$

④ $\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt6}{4}+\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$$

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{7\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}{\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{\sqrt2-\sqrt6}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{2-6}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{-4}$$

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\frac{8+2\sqrt{12}}{-4}=\frac{8+4\sqrt3}{-4}=-2-\sqrt3$$

(3 $\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos x$ ؟؟

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x$$

$$=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt3}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt3}{2}\sin x=2\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x$$

تمرين 2 : بين أن : $\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3})+\sin x=0$

الجواب :لدينا

$$\sin(x+\frac{2\pi}{3})=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\cos x=\sin x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x$$

$$\sin(x+\frac{2\pi}{3})=-\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x$$

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3})=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\cos x=\sin x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x$$

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3})=-\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos x$$

اذن : $\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3})+\sin x=-2\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x=-\sin x+\sin x=0$

تمرين3: علما أن: $0<a<\frac{\pi}{2}$ و $0<b<\frac{\pi}{2}$ و $\cos a=\sin b=\frac{1}{2}$

1. أحسب $\sin a$ و $\cos b$
2. أحسب $\sin(a+b)$

أجوبة:1)حساب $\cos b$

نعلم أن : $\cos^2 b+\sin^2 b=1$ يعني $\cos^2 b=1-\sin^2 b$ يعني $\cos^2 b=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

يعني $\cos^2 b=\frac{3}{4}$ يعني $\cos b=\frac{\sqrt3}{2}$ أو $\cos b=-\frac{\sqrt3}{2}$ ونعلم أن : $0<b<\frac{\pi}{2}$

اذن : $\cos b=\frac{\sqrt3}{2}$

حساب $\sin a$

نعلم أن : $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ يعني $\sin^2 a=1-\cos^2 a$ يعني $\sin^2 a=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

يعني $\sin^2 a=\frac{3}{4}$ يعني $\sin a=\frac{\sqrt3}{2}$ أو $\sin a=-\frac{\sqrt3}{2}$ ونعلم أن : $0<a<\frac{\pi}{2}$

اذن : $\sin a=\frac{\sqrt3}{2}$

2)نعلم أن: $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

اذن : $\sin(a+b)=\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

II.نتائج صيغ التحويل و صيغ أخرى

$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$ و $\cos(2a)=1-2\sin^2 a$

$\cos(2a)=2\cos^2 a-1$ اذن : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$

$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$ و $\cos^2 a+\sin^2 a=1$

$\sin(2a)=2\sin a\times\cos a$ و $1+\tan^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}$

تمرين 4 : علما أن : $\sin x=\frac{1}{3}$ و $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

أحسب $\cos(2x)$ و $\sin(2x)$

أجوبة: نعلم أن : $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$

اذن : $\cos(2x)=1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

و نعلم أن : $\sin(2x)=2\sin x\times\cos x$ ومنه يجب حساب : $\cos x$

لدينا : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ يعني $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ يعني $\cos^2 b=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2$

يعني $\cos^2 x=\frac{8}{9}$ يعني $\cos x=\frac{\sqrt8}{3}$ أو $\cos x=-\frac{\sqrt8}{3}$ ونعلم أن : $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

اذن : $\cos x=\frac{\sqrt8}{3}$ ومنه : $\sin(2x)=2\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt8}{3}=\frac{2\sqrt8}{9}$

تمرين5: أحسب $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$ (لاحظ أن $\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$)

أجوبة: حساب : $\cos\frac{\pi}{8}$

نستعمل العلاقة : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ ونضع مثلا : $a=\frac{\pi}{8}$

ونجد : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos 2\frac{\pi}{8}}{2}$ يعني $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}$ يعني $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{2+\sqrt2}{4}$

يعني $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{4}}$ أو $\cos\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{4}}$

ولكننا نعلم أن : $0\le\frac{\pi}{8}\le\frac{\pi}{2}$ اذن : $\cos\frac{\pi}{8}\ge0$ ومنه : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$

حساب: $\sin\frac{\pi}{8}$ يمكننا استعمال احدى القواعد التالية : $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$ أو $\sin(2a)=2\sin a\times\cos a$ أو $\cos^2 a+\sin^2 a=1$

لدينا : $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$ ونضع مثلا : $a=\frac{\pi}{8}$

ونجد : $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos 2\frac{\pi}{8}}{2}$ يعني $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}$ يعني $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt2}{4}$

يعني $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt2}{4}}$ أو $\sin\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt2}{4}}$

ولكننا نعلم أن : $0\le\frac{\pi}{8}\le\frac{\pi}{2}$ اذن : $\sin\frac{\pi}{8}\ge0$ ومنه : $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

تمرين6: بين أن : $\frac{\sin3x}{\sin x}-\frac{\cos3x}{\cos x}=2$ $\quad\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

الجواب : $\frac{\sin3x}{\sin x}-\frac{\cos3x}{\cos x}=\frac{\sin3x\cos x-\sin x\cos3x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}$

$$=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}=\frac{\sin2x}{\sin x\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}=2$$

تمرين7: بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin^2 2x-\cos2x-1=-2\cos^2x\times\cos2x$

2) $2\sin^2x+12\cos^2x=5\cos2x+7$

الجواب :

(1 $\sin^2 2x-\cos2x-1=(2\cos x\sin x)^2-2\cos^2x+1-1$

$$4\cos^2x\sin^2x-2\cos^2x=-2\cos^2x\cos2x$$

(2 $2\sin^2x+12\cos^2x=2\sin^2x+12(1-\sin^2x)=-10\sin^2x+12$

$$=\frac{-10}{2}(1-\cos2x)+12=-5(1-\cos2x)+12=5\cos2x+7$$

تمرين8: بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}$

(1 $\sin3x=\sin x\times(3-4\sin^2x)$

(2 $\cos3x=\cos x(4\cos^2x-3)$

(3 $\cos(4x)=8\cos^4x-8\cos^2x+1$

(4 $\sin(4x)=4\sin x(2\cos^3x-\cos x)$

(5 $\cos^3x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos3x)$

أجوبة :1) $\sin3x=\sin(2x+x)=\sin2x\cos x+\cos2x\sin x$

$$=2\sin x\cos^2x+(1-2\sin^2x)\sin x=2\sin x(1-\sin^2x)+(1-2\sin^2x)\sin x$$

$$=2\sin x-2\sin^3x+\sin x-2\sin^3x=3\sin x-4\sin^3x=\sin x(3-4\sin^2x)$$

(2 $\cos3x=\cos(2x+x)=\cos x\cos2x-\sin2x\sin x$

$$=\cos x(2\cos^2x-1)+\sin x\times2\cos x\sin x=2\cos^3x-\cos x-2\cos x\sin^2x$$

$$=2\cos^3x-\cos x-2\cos x(1-\cos^2x)=2\cos^3x-\cos x-2\cos x+2\cos^2x$$

$$=4\cos^3x-3\cos x=\cos x(4\cos^2x-3)$$

(3 $\cos(4x)=\cos(2\times2x)=2\cos^2 2x-1=2(2\cos^2x-1)^2-1$

$$=2(4\cos^4x-4\cos^2x+1)-1=8\cos^4x-8\cos^2x+1$$

(4 $\sin(4x)=\sin(2\times2x)=2\sin2x\cos2x=2\times2\sin x\cos x(2\cos^2x-1)$

$$\sin(4x)=4\sin x\cos x(2\cos^2x-1)=4\sin x(2\cos^3x-\cos x)$$

(5 $\cos^3x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos3x)$ ؟؟

طريقة1:

$$\frac{1}{4}(3\cos x+\cos3x)=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos(x+2x))=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos x\cos2x-\sin x\sin2x)$$

$$=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos x(2\cos^2x-1)-2\sin x\sin x\cos x)$$

$$=\frac{1}{4}(2\cos^3x-\cos x-2\cos x+2\cos^3x+3\cos x)=\frac{1}{4}(4\cos^3x)=\cos^3x$$

طريقة2: نستعمل صيغة تحويل جداء الى مجموع

$$\cos^3x=\cos^2x\times\cos x=\frac{1+\cos2x}{2}\times\cos x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos2x\times\cos x)$$

$$\cos^3x=\frac{1}{2}\left(\cos x+\frac{1}{2}(\cos3x+\cos x)\right)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos3x+\frac{1}{4}\cos x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos3x$$

ومنه : $\cos^3x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos3x)$

تابع صيغ أخرى:

$\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2a}$ وفق شروط محددة

$\tan(x)=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ و $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ و $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\times\cos\frac{x}{2}$

$\cos x=\frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ و $\sin x=\frac{2\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

بوضع : $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ و لكل x **من** $\mathbb{R}$ بحيث $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

و $x\neq\pi+2k\pi$ **و لكل** $k\in\mathbb{Z}$

لدينا : $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ **و** $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ **و** $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

مثال:علما أن: $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=3$ أحسب: $\tan x$ و $\sin x$ و $\cos x$

تمرين9: علما أن : $P(x)=\sin2x-\sin x$ و $Q(x)=1+\cos x+\cos2x$

بين أن : $Q(x)=\cos x(2\cos x+1)$ وأن $P(x)=\sin x(2\cos x-1)$

الجواب :

$$Q(x)=1+\cos x+\cos2x=1+\cos x+2\cos^2x-1=\cos x+2\cos^2x=\cos x(1+2\cos x)$$

$$P(x)=\sin2x-\sin x=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)$$

III.تحويل جداء إلى مجموع:

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

$$\cos a\sin b=-\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$$

أمثلة: أكتب على شكل مجموع :

(1 $\cos2x\times\sin4x$ (2 $\sin x\times\sin3x$ (3 $\cos4x\times\cos6x$

أجوبة : (1

$$\cos2x\times\sin4x=\frac{1}{2}(\sin(2x+4x)-\sin(2x-4x))=\frac{1}{2}(\sin6x-\sin(-2x))$$

$$=\frac{1}{2}(\sin6x+\sin2x)=\frac{1}{2}\sin6x+\frac{1}{2}\sin2x$$

(2 $\sin x\times\sin3x=\frac{1}{2}(\cos(x+3x)-\cos(x-3x))=\frac{1}{2}(\cos4x-\cos(-2x))$

$$\sin x\times\sin3x=\frac{1}{2}(\cos4x-\cos(2x))=\frac{1}{2}\cos4x-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

(3 $\cos4x\times\cos6x=\frac{1}{2}(\cos(4x+6x)+\cos(4x-6x))=\frac{1}{2}(\cos4x-\cos(-2x))$

$$\cos4x\times\cos6x=\frac{1}{2}\cos4x-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

IV.تحويل مجموع إلى جداء:

$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

مثال: أكتب على شكل جداء: $\sin 2x+\sin 4x$

الجواب: $\sin 2x+\sin 4x=2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)$

$$\sin 2x+\sin 4x=2\sin 3x\cos(-2x)=2\sin 3x\cos 2x$$

تمرين10:

1. بين $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)$
2. بين $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$
3. استنتج أن : $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=-\dfrac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

أجوبة: (1 $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\dfrac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$

$$\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=2\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}$$

(2 $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\dfrac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$

$$\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=-2\cos\frac{5\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}$$

(3 $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=\dfrac{2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

$$=-\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)}\times\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}=-\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)\times\frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}=-\frac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$$

تمرين11: بين أن : $\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\tan 3x\times\tan x$

الجواب: $\cos 2x-\cos 4x=-2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\sin(3x)\sin x$

$$\cos 2x+\cos 4x=-2\cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\cos 3x\cos x$$

ملاحظة: $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

$$\frac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\frac{2\sin 3x\sin x}{2\cos 3x\cos x}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\times\frac{\sin x}{\cos x}=\tan 3x\times\tan x$$

تمرين12: بين أن : $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=-\sin 4x\times\sin x$

الجواب: $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=\left(\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)\left(\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)$

$$\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}=2\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=-2\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

ومنه : $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$$=-2\cos(2x)\times\sin(2x)2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\sin(4x)\sin x$$

تمرين13: بين أن : $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=2\sin x\cos x(1+2\cos x)$

الجواب: $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\sin 2x+\sin x+\sin 3x=\sin 2x+2\sin 2x\cos x$

$$=\sin 2x+2\sin 2x\cos x=\sin 2x(1+2\cos x)=2\sin x\cos x(1+2\cos x)$$

V.تحويل الصيغة: $a\cos x+b\sin x$

مثال1: $\cos x-\sin x$

$a=1$ و $a=-1$.

نحسب : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

مثال2: حل في $[0;2\pi]$ المعادلة: $\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$

الجواب: نحول أولا : $\sqrt{3}\cos x+\sin x$

$a=\sqrt{3}$ و $a=1$.

نحسب : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$$

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

يعني: $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

يعني: $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=2k\pi$

ومنه : $S=\left\{0;\frac{\pi}{3};2\pi\right\}$