

الحساب المثلثي calculs trigonométriques

القدرات المنتظرة

التمكن من مختلف صيغ التحويل . التمكن من حل معادلات
ومتراجحات مثلثية تؤول في حلها إلى معادلات أساسية . التمكن من تمثيل وقراءة حلول
معادلتها او متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية

1- ص - ص يـ فـ الجـ مع

1- المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$ ولتكن $\zeta(O, r=1)$ الدائرة المثلثية

ولتكن $M(x)$ و $M'(y)$ نقطتين من ζ فان $\overline{OM'} = \cos(y)\vec{i} + \sin(y)\vec{j}$ و

$$\overline{OM} = \cos(x)\vec{i} + \sin(x)\vec{j}$$

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \|\overline{OM}\| \cdot \|\overline{OM'}\| \cos(\overline{OM}; \overline{OM'}) \quad \text{و} \quad \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \quad (1) \quad \text{ادن}$$

$$= 1 \times 1 \cdot \cos(y-x) \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $\cos(y-x) = \cos(y)\cos(x) + \sin(y)\sin(x)$

$$\cos(y+x) = \cos(y-(-x))$$

$$= \cos(y)\cos(-x) + \sin(y)\sin(-x) \quad \text{ب- لدينا}$$

ونعلم أن \cos دالة زوجية و \sin دالة فردية ادن:

$$\cos(y+x) = \cos(y)\cos(x) - \sin(y)\sin(x)$$



$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) \\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(y) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)\end{aligned}$$

$$tg(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$tg(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb}$$

$$tg(a+b) = \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}}$$

$$\begin{aligned}tg(a-b) &= tg[a + (-b)] \\ &= \frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb}\end{aligned}$$

تمرين 1. احسب النسب المثلثية $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ و $\frac{7\pi}{12}$

2. احسب $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned}tg(2a) &= \frac{2tg(a)}{1 - tg^2(a)} \quad \text{و} \quad \sin(2a) = 2\sin a \cdot \cos a \quad \text{و} \quad \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 2\cos^2(a) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(a)\end{aligned}$$



Brahim Ajghaider

تمرين 2: علما أن $tg(a) = \frac{-1}{2}$ فاحسب $tg(2a)$ و $cos(2a)$ ثم $sin(2a)$

تمرين 3: احسب $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

تمرين 4: بين انه لكل a من \mathbb{R} فان $sin(2a) = sin\left(\frac{\pi}{3} + 2a\right) - sin\left(\frac{\pi}{3} - 2a\right)$ و

$$cos(2a) = cos\left(\frac{\pi}{3} + 2a\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - 2a\right)$$

II - تحويل الجداء إلى جمع

لدينا $cos(y+x) = cos(y)cos(x) - sin(y)sin(x)$

و $cos(x-y) = cos(y)cos(x) + sin(y)sin(x)$

$$cos(x)cos(y) = \frac{1}{2} [cos(x+y) + cos(x-y)]$$

بجمع طرف بطرف نجد

$$sin(x)sin(y) = -\frac{1}{2} [cos(x+y) - cos(x-y)]$$

بطرح طرف بطرف نجد

$$sin(x)cos(y) = \frac{1}{2} [sin(x+y) + sin(x-y)]$$

$$cos(x)sin(y) = \frac{1}{2} [sin(x+y) - sin(x-y)]$$

تحويل الجداء مع إلى جداء

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a+b}{2} \\ y=\frac{a-b}{2} \end{cases}$$

في العلاقات السابقة نضع



Brahim Ajghaider

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

III- **تجربة** **ويل** $\frac{a-b}{2}$ $\frac{a+b}{2}$

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ لكل $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga.tgb}} \quad \text{فان } a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{tg}(a-b) = \frac{\text{tga} - \text{tgb}}{1 + \text{tga.tgb}} \quad \text{فان } a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

IV- **تجربة** **ويل الصيغة** $a \cos x + b \sin x$

ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$\left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \quad \text{و} \quad \left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \quad \text{اذن} \quad b^2 \leq a^2 + b^2 \quad \text{وكذلك} \quad a^2 \leq a^2 + b^2 \quad \text{ولدينا}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) = 1 \quad \text{وبما ان}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{و} \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{أي} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{ونعلم ان}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{و} \quad \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Brahim Ajghaider

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$$

وبالتالي

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos x \sin \beta + \sin x \cos \beta) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \beta) \text{ و}$$

تمرين 5 عبر بدالات $\cos x$ و $\sin x$ عما يلي .1 $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.2 $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$A = \cos(2x) + \cos(6x)$$

$$B = \cos(7x) - \cos(3x)$$

$$C = \sin(3x) + \sin(5x)$$

$$D = \sin(8x) - \sin(6x)$$

تمرين 6 حول إلى جداء كل من التعابير التالية

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

تمرين 7 ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن

$$1. \text{ تحقق من أن } \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right) \text{ تمرين 8}$$

$$2. \text{ ا- بين أن } (\forall x \in \mathbb{R}) / \cos(3x) = \cos x(1 - 4\sin^2 x)$$

$$\text{ب- استنتج قيمة كل من } \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \text{ ; } \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$3. \text{ بين أن } \sin\left(\frac{7\pi}{30}\right) = \frac{1}{8}(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1) \text{ (لاحظ أن } \frac{7\pi}{30} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10} \text{)}$$

تمرين 9 حل في \mathbb{R} المعادلات التالية .1 $\sin 7x = 0$.2 $\cos 3x = 0$.3 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$$3. \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ .4 } \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ .5 } \sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x + (\sqrt{3} - 1) \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

تمرين 10 .1 حل في \mathbb{R} المعادلات التالية

$$2. \text{ . حل ، ف ، } \mathbb{R} \text{ المعادلات التالية } \cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$$



Brahim Ajghaider