فرض محروس رقم 2

التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=\frac{5}{2}$ و $U_{n+1}=5-\frac{6}{U_n}$

1) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 2<U_n<3$

2) بين المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية (لاحظ أن $X^2-5X+6=(X-2)(X-3)$)

3) نضع $V_n=\frac{U_n-3}{U_n-2}$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أن $(V_n)_n$ هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و أحسب الحد العام V_n بدلالة n

ب- استنتج أن $U_n=\frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n}$

ج- أحسب بدلالة n الجمع $S=V_0+V_1+.....+V_{n-1}$

التمرين الثاني

$(U_n)_n$ متتالية عددية بحيث : $U_0=2$ و $U_{n+1}=\frac{3U_n-2}{2U_n-1}$ ثم نضع $W_n=\frac{1}{U_n-1}$

1) أ- أحسب الحدود U_1 ; W_0 و W_1

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n>1$

2) بين أن $U_{n+1}-U_n=\frac{-2(U_n-1)^2}{2U_n-1}$ و استنتج رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3) أ- بين أن المتتالية $(W_n)_n$ حسابية و أحسب W_n بدلالة n

ب- استنتج أن $U_n=\frac{2n+2}{2n+1}$

ج- أحسب بدلالة n الجمع $T=W_0+W_1+.....+W_n$

التمرين الثالث

$(u_n)_n$ متتالية بحيث : $u_0=2$ و $u_{n+1}=2u_n-n+1$ و نضع $v_n=u_n-n$

1) أحسب الحدود u_1 ; u_2 ; v_0 و v_1

2) بين بالترجع أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n>n$

3) بين أن $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=2$

4) نضع $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بين أن $S_n=2^{n+2}+\frac{n^2+n-8}{2}$

(نعطي $1+2+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$)

تمرين إضافي

لنكن $(a_n)_n$ متتالية غير منعدمة حسابية أساسها $r\neq 0$

بين أن $\frac{1}{a_0a_1}+\frac{1}{a_1a_2}+.....+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n}{a_0a_n}$