تصحيح فرض محروس رقم 1

التمرين 1 :

لدينا $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2+1 \neq 0\}$$

أي $Df = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \neq -1\}$

هذا محقق

إذن $Df = \mathbb{R}$

* لنبين أن $f(x)$ تقبل قيمة قصوى في $a=1$

لدينا :

$$f(x) - f(1) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 2$$

يعني $= \dfrac{x^2+2x+1-2x^2-2}{x^2+1}$

يعني $= \dfrac{-x^2+2x-1}{x^2+1}$

إذن $f(x) - f(1) = \dfrac{-(x-1)^2}{x^2+1}$

لدينا $(x+1)^2 > 0$ إذن $-(x+1)^2 < 0$

و $x^2+1 > 0$

إذن $f(x) - f(1) < 0 \iff f(x) < f(1)$

وبالتالي الدالة f تقبل قيمة قصوى في $a=1$.

التمرين 2 :

-1

$g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ و $h(x) = x^2 - 2x$

لدينا $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0$

لدينا $a > 0$ / $h(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

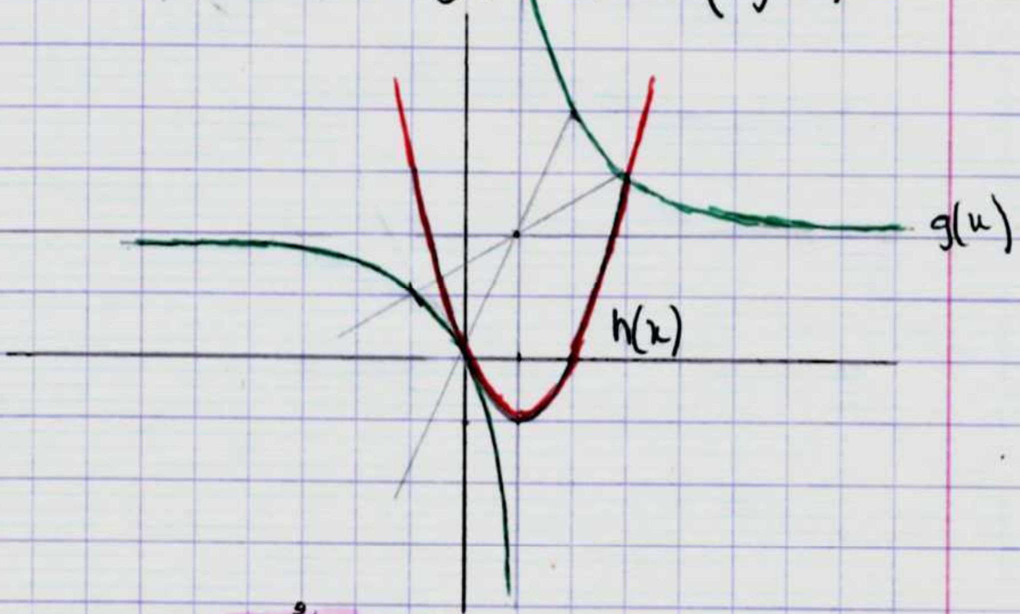
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

من إنجاز: خديجة العزابي

2- رسم المنحنيين (C_g) و (C_h)

1- (C_g) عبارة عن هذلول مركز تناظره $\Omega(1;2)$ ومقارباه هما $x=1$ و $y=2$

2- لدينا h دالة حدودية إذن (C_h) عبارة عن شلجم رأسه $\Omega'(1;-1)$ ومحور تناظره $x=1$



3- حل مبيانيا المتراجحة $(x-1)^2 \leqslant \frac{3x-1}{x-1}$

لدينا $(x-1)^2 \leqslant \frac{3x-1}{x-1}$ يعني $x^2-2x+1 \leqslant \frac{3x-1}{x-1}$

يعني $x^2-2x \leqslant \frac{3x-1}{x-1}-1$ أي $x^2-2x \leqslant \frac{2x}{x-1}$ أي $h(x) \leqslant g(x)$

وحسب الشكل نجد $S =]1,3]$.

-4

أ- لدينا $(h\circ g)(x) = (g(x))^2 - 2(g(x))$

$$= \frac{4x^2}{(x-1)^2} - \frac{4x}{x-1}$$

$$(h\circ g)(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$$

أي أن $(h\circ g)(x) = f(x)$

ب - لنحدد $g([2,3])$

لدينا $g(x)$ تناقصية على المجال $[2,3]$ (g دالة مرجعية)

إذن $g([2,3]) = [g(3), g(2)]$

$$g([2,3]) = [3;4]$$

* لندرس رتابة الدالة f على المجال $[2,3]$

لدينا g تناقصية على المجال $[2,3]$

و h تزايدية على $[3,4]$

إذن f تناقصية على المجال $[2,3]$.

ج - لنبين أن f تزايدية على المجال $[-1,0]$

لدينا g تناقصية على $[-1,0]$ و $g([-1,0]) = [0;1]$

و h تناقصية على $[0,1]$

إذن f تزايدية على المجال $[-1,0]$.

التمرين الثالث

-1

أ- لدينا P_1 : " $(\forall x \in \mathbb{R})\ x+\frac{1}{x} \geq 2$ أو $x \leq 0$ "

إذن $\overline{P_1}$: " $(\exists x \in \mathbb{R})\ x+\frac{1}{x} < 2$ و $x > 0$ "

ولدينا P_2 : " $(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ "

$\overline{P_2}$: " $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \in \mathbb{Z}$ و $x \notin \mathbb{Z}$ "

ب - الاستلزام المضاد للعكس:

$$(\exists x \in \mathbb{R})\ x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \notin \mathbb{Z}.$$

2- نبين بالترجع $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 1+5+9+\dots+(4n-3) = n(2n-1)$

لدينا من أجل $n = 1$ $\quad 1 = 2-1 = 1$ هذا صحيح

لنفترض أن $1+5+9+\dots+(4n-3) = n(2n-1)$ ونبين $1+5+9+\dots+(4n+1) = (n+1)(2n+1)$

لدينا $1+5+9+\dots+(4n+1) = \underbrace{1+5+9+\dots+(4n-3)} + (4n+1)$

$$= n(2n-1) + 4n + 1$$
$$= 2n^2 - n + 4n + 1$$
$$= 2n^2 + 3n + 1$$
$$= 2(n+1)(n+\tfrac{1}{2}) = (n+1)(2n+1) \text{ cqfd}$$

$$\Leftarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 1+5+9+\dots(4n-3) = n(2n-1)$$