Vecteurs et colinéarité. Angles orientés et trigonométrie

Table des matières

1 Rappels sur les vecteurs

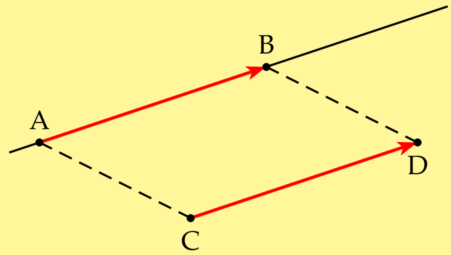
1.1 Définition

Définition 1 : Un vecteur $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- une direction (la droite (AB)).
- un sens (de A vers B)
- Une longueur : la norme du vecteur $\|\vec{u}\|$ ou AB

Égalité de deux vecteurs

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme.



1.2 Opérations sur les vecteurs

1.2.1 Somme de deux vecteurs

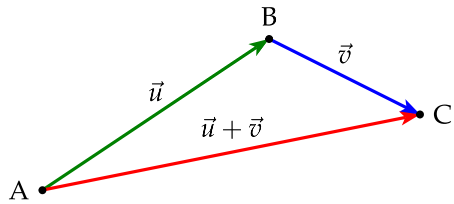
La somme de deux vecteurs est définie par la relation de chasles :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Cette relation permet de décomposer un vecteur.

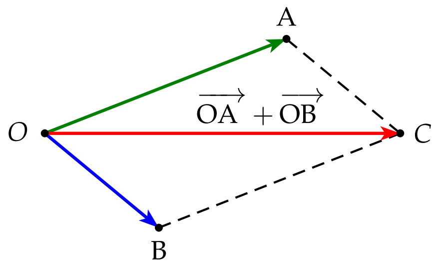
On a l'inégalité triangulaire :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$



Construction de la somme de deux vecteurs de même origine.

On effectue un parallélogramme, afin de reporter le deuxième vecteur permettant d'appliquer la relation de Chasles.



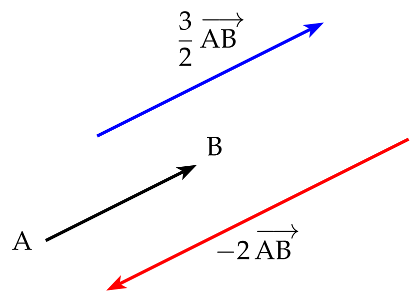
Propriété 1 : La somme de deux vecteurs :

- Est commutative : $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$
- Est associative : $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
- Possède un élélment neutre $\vec{0}$: $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$
- tout vecteur possède un opposé $-\vec{u}$: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

1.2.2 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Lorsqu'on multiplie un vecteur par un réel k, appelé scalaire, le vecteur ainsi formé $k\vec{u}$ est tel que :

- Sa longueur est multiplié par $|k|$
- Si $k > 0$ son sens est inchangé
- Si $k < 0$ son sens est inversé.
- Si $k = 0$ on a : $0\,\vec{u} = \vec{0}$



Propriété 2 : **Bilinéarité**. La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition de deux vecteurs ou la somme de deux réels.

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{v}$

1.3 Colinéarité de deux vecteurs

Définition 2 : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si et seulement si, il existe un réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$

Remarque : Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur car : $\vec{0} = 0\,\vec{u}$

Propriété 3 : La colinéarité permet de montrer le parallélisme et l'alignement.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ (AB) // (CD)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ A, B, C alignés

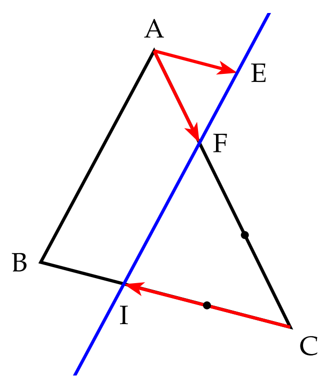
Exemple : Voir figure ci-contre :

Soit ABC un triangle, E, I et F tels que :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que I, E et F sont alignés



Exprimons $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

- $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

  On en déduit que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BI}$ donc que AEIB est un parallélogramme. On a alors : $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AB}$

- De plus : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

On en déduit alors : $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{EI}$. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires et donc les points E, F et I sont alignés.

1.4 Géométrie analytique

Propriété 4 : Mis à part les calculs de distance qui exige un repère orthonormé, les formules suivantes sont valable dans tout repère.

- Soit deux points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vérifient :
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A \quad ; \quad y_B - y_A)$$
- Soit deux points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, les coordonnées du milieu I du segment [AB] vérifient :
$$I = \left(\frac{x_B + x_A}{2} \quad ; \quad \frac{y_B + y_A}{2}\right)$$
- On appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$, le nombre :
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$
- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si, leur déterminant est égale à 0
$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$
- Dans un repère orthonormal, la norme d'un vecteur $\vec{u}$ et la distance entre les points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ vérifient :
$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemples : Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) Soit $A(1\,;4)$ et $B(-5\,;2)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ de I $= m$[AB] et la longueur AB

   $\overrightarrow{AB} = (-5-1\ ;\ 2-4) = (-6\ ;\ -2)$ et $I = \left(\dfrac{1-5}{2}\ ;\ \dfrac{4+2}{2}\right) = (-2\ ;\ 3)$

   $AB = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

2) On donne $\vec{u}(2\ ;\ 3)$ et $\vec{v}(3\ ;\ 4)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

   $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$. Comme $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \neq 0$ les vecteurs ne sont pas colinéaires.

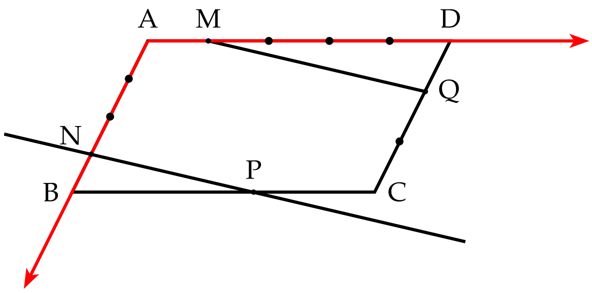
Dans un repère quelconque

ABCD est un parallélogramme. M, N, Q sont tels que :

$$\overrightarrow{DM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

La parallèle à (MQ) menée par N coupe BC en P. Déterminer le coefficient k de colinéarité tel que $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{AD}$.

Faisons une figure, en prenant comme repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$:
D'après l'énoncé les coordonnées de M, N et Q sont :



$$M\left(0;\frac{1}{5}\right),\quad N\left(\frac{3}{4};0\right),\quad Q\left(\frac{1}{3};1\right)$$

P est sur (BC), son abscisse est 1.

De plus comme k est tel que : $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{AD}$, son ordonnée vaut k.
Les coordonnées de P sont : $P(1;k)$

Comme (NP) // (MQ), le déterminant de $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{NP}$ est nul, on a :

$$\det(\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{NP}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - 0 & 1 - \frac{3}{4} \\ 1 - \frac{1}{5} & k - 0 \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{5} & k \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{k}{3} - \frac{1}{5} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{k}{3} = \frac{1}{5} \quad\Leftrightarrow\quad k = \frac{3}{5}$$

2 Équation cartésienne d'une droite

2.1 Vecteur directeur

Définition 3 : Soit une droite d définie par deux points A et B. Un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Remarque : Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas unique, car 2 points quelconques de la droite définissent un vecteur directeur. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de la droite d, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. On a donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Exemple : Soit la droite (AB) définie par : $A(3\,;-5)$ et $B(2\,;\,3)$

Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB), on alors :

$$\vec{u} = (2-3\,;\,3-(-5)) = (-1\,;\,8)$$

Théorème 1 : Une droite est entièrement définie si l'on connaît un point A et une vecteur directeur $\vec{u}$.

Démonstration : La démonstration est immédiate car à partir du point A et du vecteur directeur $\vec{u}$, on peut déterminer un autre point B tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

2.2 Équation cartésienne d'une droite

Théorème 2 : Toute droite d du plan peut être déterminée par une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec a et b non tous les deux nuls.
Une telle équation est appelée **équation cartésienne** de la droite d.

Réciproquement une équation du type $ax + by + c = 0$ définie une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;\,a)$

Démonstration : Soit la droite d passant par le point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A})$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;\,a)$.
Soit un point quelconque $\mathrm{M}(x\,;\,y)$ de la droite d. On a alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{u}$ colinéaires.
Leur déterminant est alors nul. On a : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = (x - x_\mathrm{A}\,;\,y - y_\mathrm{A})$, donc :

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \vec{u}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} x - x_\mathrm{A} & -b \\ y - y_\mathrm{A} & a \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$a(x - x_\mathrm{A}) + b(y - y_\mathrm{A}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad ax + by - (ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A}) = 0$$

On pose $c = -(ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A})$, on a donc : $ax + by + c = 0$

Réciproquement : Soit l'équation $ax + by + c = 0$. Deux cas peuvent se présenter

- $a = 0$ ou $b = 0$, on obtient respectivement $y = -\dfrac{c}{b}$ et $x = -\dfrac{c}{a}$ qui sont respectivement une droite horizontale et une droite verticale.
- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ on peut déterminer deux points de cette équation en prenant respectivement $x = 0$ et $y = 0$. On obtient alors les points $\mathrm{A}\left(0\,;-\dfrac{c}{b}\right)$ et $\mathrm{B}\left(-\dfrac{c}{a}\,;\,0\right)$ on obtient alors le vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(-\dfrac{c}{a}\,;\,\dfrac{c}{b}\right)$. Vérifions que ce vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}(-b\,;\,a)$

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\vec{u}) = \begin{vmatrix} -\dfrac{c}{a} & -b \\ \dfrac{c}{b} & a \end{vmatrix} = -c + c = 0$$

Exemple : Soit la droite d définie par les point $\mathrm{A}(2\,;\,3)$ et $\vec{u}(-2\,;\,1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

En posant $\mathrm{M}(x\,;\,y)$, on a :

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \vec{u}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} x - 2 & -2 \\ y - 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x - 2) + 2(y - 3) = 0$$

$$x + 2y - 2 - 6 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x + 2y - 8 = 0$$

⚠ L'équation cartésienne d'une droite n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients par un facteur k non nul. Par exemple, on peut trouver pour la droite de l'exemple : $-2x - 4y + 16 = 0$ en multipliant par (-2).

2.3 Équation réduite d'une droite

Théorème 3 : Toute droite d non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = mx + p$ appelée équation réduite de d. Le vecteur $\vec{u}(1\,;m)$ est un vecteur directeur de d

3 Angles orientés

3.1 Le radian

Définition 4 : Le radian est une unité de mesure d'un angle comme le degré.

Il est défini comme la longueur de l'arc entre 2 points du cercle unité.

Le demi cercle unité a un longueur de π et donc correspond à un angle de π radian. On a alors : $180°=\pi$ rd

La mesure en degré de 1 radian vaut donc :

$$1 \text{ rd} = \frac{180}{\pi} \simeq 57°$$

Remarque : Le radian est une grande unité qui n'est pas intuitive contrairement au degré qui est notre unité première.

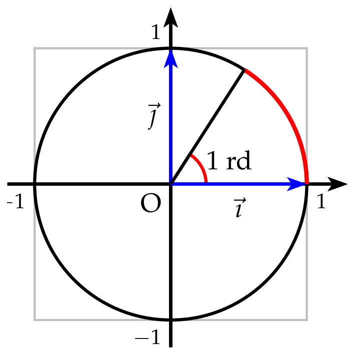


Tableau des angles remarquables en radian :

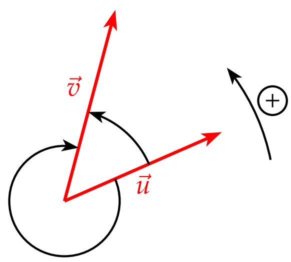
Degré	30°	45°	60°	90°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

3.2 Définition

Définition 5 : Un angle orienté est défini par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u}, \vec{v})$.

L'angle est alors orienté de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$.

Sur la figure ci-contre, on a représenté deux angles orientés, représentant le même angle $(\vec{u}, \vec{v})$. Le premier est orienté dans le sens direct et l'autre dans le sens indirect.



3.3 Mesure d'un angle orienté

Pour mesurer un angle orienté, il faut une unité (degré ou radian) et un sens de parcours. Un même angle peut avoir des mesures différentes, comme dans la figure ci-dessus. Ces mesures sont alors équivalentes. Elles sont égales à 2π près, on dit alors qu'elles sont égales modulo 2π.

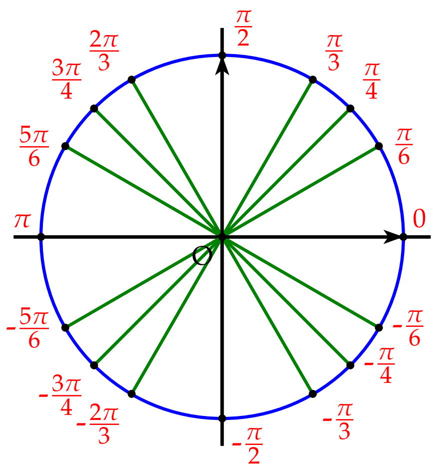
Définition 6 : On dit que les mesures (en radian) θ_1 et θ_2 d'un même angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ sont égales modulo 2π, s'il existe un entier relatif k tel que :

$$\theta_2 = \theta_1 + k \times 2\pi \quad \text{on écrit alors} \quad \theta_1 = \theta_2 \quad [2\pi]$$

Exemple : $-\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ en effet, $-\dfrac{5\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{-5\pi + 6\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$

Définition 7 : On appelle mesure principale d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, la mesure θ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$.
On appelle mesure positive d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, la mesure θ avec $\theta \in [0, 2\pi[$

Exemple : Voici ci-dessous le cercle trigonométrique avec les angles remarquables exprimés en mesure principale.



3.4 Propriétés

1) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad (\vec{u}, \vec{v}) = \pi \quad [2\pi]$$

2) **Relation de Chasles** : Soit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors :

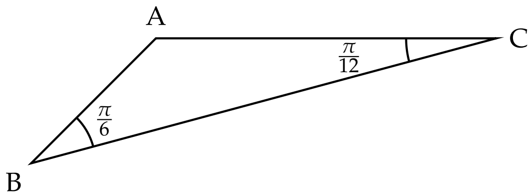
$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$$

3) Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors on a :

$$\begin{aligned}
(\vec{v}\,,\,\vec{u}) &= -(\vec{u}\,,\,\vec{v}) \\
(-\vec{u}, \vec{v}) &= \quad (\vec{u}\,,\,\vec{v}) + \pi \\
(\vec{u}\,, -\vec{v}) &= \quad (\vec{u}\,,\,\vec{v}) + \pi \\
(-\vec{u}, -\vec{v}) &= \quad (\vec{u}\,,\,\vec{v})
\end{aligned}$$

Exemple :

D'après la figure suivante, déterminer à l'aide des propriétés des angles orientés : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$



$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) \quad \text{relation de Chasles}\\ &= \left[(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \pi\right] + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \quad \text{inversion des vecteurs}\\ &= -\frac{\pi}{6} + \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

Remarque : On aurait pu retrouver cet angle de façon "*classique*" en faisant le complément à π

4 Trigonométrie

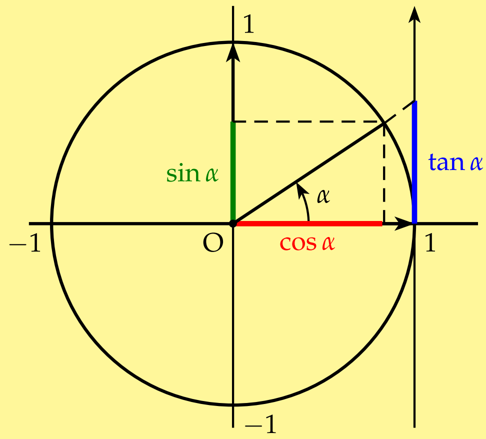
4.1 Définition

Définition 8 : Dans un repère orthonormal direct, α est l'angle orienté dans le cercle unité, on a alors :

$\cos\alpha$ = projection de l'angle sur l'axe des abscisses

$\sin\alpha$ = projection de l'angle sur l'axe des ordonnées

$\tan\alpha$ = projection de l'angle sur la droite tangente au cercle



4.2 Tableau des angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

4.3 Relations trigonométriques

4.3.1 Relations de base

- On a les encadrements suivants : $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$
- On vérifie facilement avec le théorème de Pythagore dans le cercle unité, la relation :
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
- On vérifie avec le théorème de Thalès, la relation : $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- À l'aide des relations précédentes, on déduit que : $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

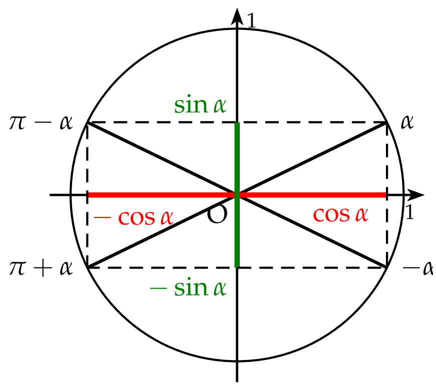
4.3.2 Relations de symétrie

Avec l'angle opposé :

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

Avec l'angle supplémentaire :

$$\sin(\pi-\alpha) = +\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$



Avec l'angle diamétralement opposé :

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = +\tan\alpha$$

Remarque : On peut constater que les fonction sinus et tangente sont impaires tandis que la fonction cosinus est paire.

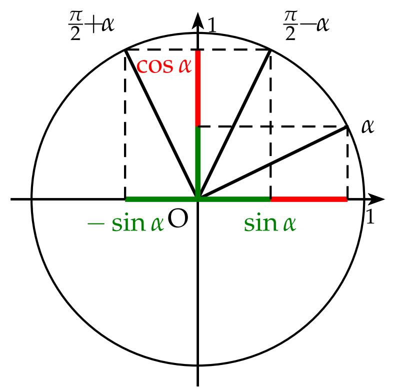
4.3.3 Relations de déphasage

Avec le complémentaire

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$

Avec un déphasage d'un quart de tour

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$$



Exemple : Simplifier : $A = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}-x\right) - 4\sin(\pi-x)$

A l'aide des formules de symétrie et de déphasage, on a :

$$A = -\sin x - 3\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 4\sin x = -\sin x + 3\sin x - 4\sin x = -2\sin x$$

4.4 Équations trigonométriques

Résolution des équations dans $\mathbb{R}$: $\cos x = a$ et $\sin x = a$

- Si $|a| > 1$, il n'y a pas de solution.
- Si $|a| \leqslant 1$, on a les solutions pour :

1) $\cos x = a \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos \alpha$
On détermine $\alpha \in [0; \pi]$ tel que $\alpha = \arccos a$ à l'aide du cercle trigonométrique. D'après les règles de symétrie : $x = \alpha$ ou $x = -\alpha$

On trouve toutes les solutions réelles en ajoutant les multiples de 2π

$$\cos x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Remarque : l'expression $x = \alpha + 2k\pi$ peut s'écrire $x = \alpha\ [2\pi]$ qui se prononce "$x = \alpha$ modulo 2π"

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$

$$\sqrt{2}\cos x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos\frac{\pi}{4}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont : $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

2) $\sin x = a \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \sin \alpha$

On détermine $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\alpha = \arcsin a$ à l'aide du cercle trigonométrique.
D'après les règles de symétrie : $x = \alpha$ ou $x = \pi - \alpha$

On trouve toutes les solutions réelles en ajoutant les multiples de 2π

$$\sin x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \sin\frac{\pi}{3}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont : $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$

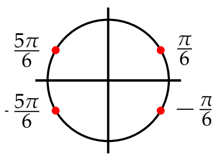
Autre exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$
On visualisera les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont donc :

$$\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$



4.5 Lignes trigonométrie dans le cercle