

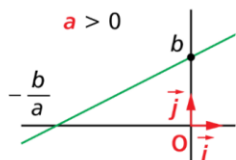
VARIATIONS D'UNE FONCTION

A - FONCTIONS DE REFERENCE

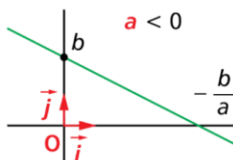
1 Les fonctions affines, carré et inverse

Fonctions affines $f : x \mapsto ax + b$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

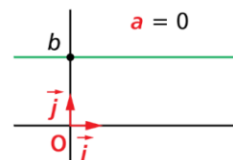
- Définies sur $\mathbb{R}$ et représentées par une droite.



f est croissante sur $\mathbb{R}$.



f est décroissante sur $\mathbb{R}$.



f est constante sur $\mathbb{R}$.

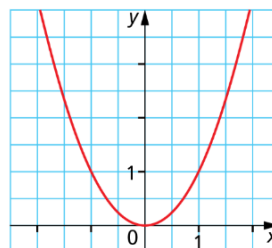
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de $-a$	0	Signe de a

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de $-a$	0	Signe de a

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de b	

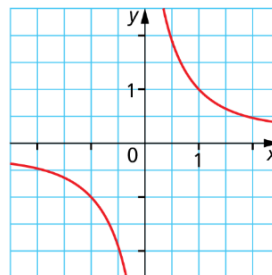
Fonction carré $f : x \mapsto x^2$

- Définie sur $\mathbb{R}$ et représentée par une parabole.
- f est décroissante sur $] -\infty ; 0]$: si $a \leq b \leq 0$, alors $a^2 \geq b^2$.
- f est croissante sur $[0 ; +\infty [$: si $0 \leq a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$.
- f est positive sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x , $x^2 \geq 0$.



Fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

- Définie sur $\mathbb{R}^*$ et représentée par une hyperbole.
- f est décroissante sur $] -\infty ; 0 [$: si $a \leq b < 0$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.
- f est décroissante sur $] 0 ; +\infty [$: si $0 < a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.
- Si $x < 0$, alors $\frac{1}{x} < 0$; si $x > 0$, alors $\frac{1}{x} > 0$.



2 La fonction racine carrée

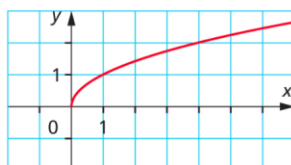
Définition 1

Si a désigne un nombre réel positif, sa **racine carrée**, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré est a .

EXEMPLE : $\sqrt{5}$ est l'unique nombre réel positif dont le carré vaut 5 : $(\sqrt{5})^2 = 5$.
 • 10 est l'unique nombre réel positif dont le carré vaut 100. On a donc $\sqrt{100} = 10$.

Définition 2

La **fonction racine carrée** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$, qui à chaque réel positif x associe sa racine carrée $\sqrt{x}$.



EXEMPLES : L'image de 0 par la fonction f est 0 ; l'image de 9 par f est 3 ; le réel négatif -2 n'a pas d'image par la fonction f .

Propriété 1

La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$

Il faut démontrer que quels que soient les réels x et y tels que $0 \leq x < y$, alors $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.

Soit les réels x et y tels que $0 \leq x < y$.

On a $(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x}) = y - x$,

d'où $(\sqrt{y} - \sqrt{x}) = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$.

Or $(\sqrt{y} + \sqrt{x}) > 0$ car $\sqrt{x} \geq 0$ et $\sqrt{y} > 0$ ($y \neq 0$)

et d'après les hypothèses $y - x > 0$. On obtient donc $\sqrt{y} - \sqrt{x} > 0$.

La fonction racine carrée est donc bien croissante.

Commentaires

On utilise $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
avec $a = \sqrt{y}$ et $b = \sqrt{x}$.

Démonstration

EXEMPLE : On a $1,2 < 3,7$, donc, puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on a l'inégalité $\sqrt{1,2} < \sqrt{3,7}$.

Propriété 2

• Soit $\mathcal{C}_x$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x$,

$\mathcal{C}_{x^2}$ celle de la fonction $x \mapsto x^2$

et $\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$ celle de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$.

• Si $x \in [0 ; 1]$, alors $\mathcal{C}_{x^2}$ est en dessous de $\mathcal{C}_x$ et $\mathcal{C}_x$ est en dessous de $\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$.

• Si $x \in]1 ; +\infty[$, alors $\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$ est en dessous de $\mathcal{C}_x$ et $\mathcal{C}_x$ est en dessous de $\mathcal{C}_{x^2}$.

On trace les courbes représentatives sur $[0 ; +\infty[$ des trois fonctions proposées, dont les équations sont $y = x$ ($\mathcal{C}_x$), $y = x^2$ ($\mathcal{C}_{x^2}$) et $y = \sqrt{x}$ ($\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$).

REMARQUE : On constate sur la figure ci-contre et on peut montrer que $\mathcal{C}_{x^2}$ et $\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ ($\mathcal{C}_x$).

On a : ① $\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$ et ② $x - x^2 = x(1 - x)$.

L'observation de ces trois courbes conduit à distinguer deux cas :

① $0 \leq x \leq 1$

• La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$,

on a $0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{1}$. On a donc $\sqrt{x} \geq 0$ et $1 - \sqrt{x} \geq 0$. D'où d'après ①, $\sqrt{x} - x \geq 0$.

• De même, si $0 \leq x \leq 1$, alors $x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$. D'où d'après ②, $x - x^2 \geq 0$.

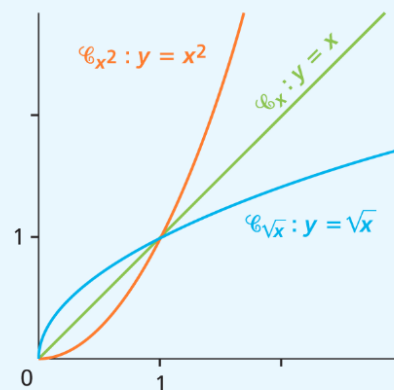
Pour tout x appartenant à $[0 ; 1]$, $\mathcal{C}_{x^2}$ est en dessous de $\mathcal{C}_x$ qui elle-même est en dessous de $\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$.

② $x > 1$

• La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\sqrt{x} > \sqrt{1}$. On a donc $1 - \sqrt{x} < 0$ et $\sqrt{x} > 0$. D'où d'après ①, $\sqrt{x} - x < 0$.

• De même, si $x > 1$, alors $x > 0$ et $1 - x < 0$. D'où d'après ②, $x - x^2 < 0$.

Pour tout x appartenant à $]1 ; +\infty[$, $\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$ est en dessous de $\mathcal{C}_x$ qui elle-même est en dessous de $\mathcal{C}_{x^2}$.

**Démonstration****3 La fonction valeur absolue****Définition 3**

Soit x un nombre réel. On appelle **valeur absolue** de x le nombre réel, noté $|x|$, égal à :

- x si x est positif ;
- $-x$ si x est négatif.

On a donc : $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$.

EXEMPLES : $|-7| = 7$; $|12,8| = 12,8$; $|-9,3| = 9,3$.

REMARQUE : Sur la droite numérique graduée d'unité OI , si M est le point d'abscisse x , alors la valeur absolue de x est la distance de M au point O , à savoir la longueur OM .

Propriété 3

- ① Pour tout réel x , on a $|x| \geq 0$.
- ② Pour tout réel x , on a $|-x| = |x|$.

DÉMONSTRATION : Soit x un réel.

① Si x est positif, alors $|x| = x \geq 0$. Si x est négatif, alors $|x| = -x \geq 0$.

② Si x est positif, alors $|x| = x$ et $|-x| = -(-x) = x$ (car $-x$ est négatif), d'où $|x| = |-x|$.
Si x est négatif, alors $|x| = -x$ et $|-x| = -x$ (car $-x$ est positif), d'où $|x| = |-x|$.

Définition 4

La **fonction valeur absolue** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, qui à chaque réel x associe sa valeur absolue $|x|$.

EXEMPLES : L'image de 0 par la fonction f est 0 ; l'image de -9 par f est 9 ;
l'image de 6,3 par f est 6,3 ; l'image de $-\sqrt{17}$ par f est $\sqrt{17}$.

Propriété 4

La fonction valeur absolue est **strictement décroissante** sur $]-\infty ; 0]$ et **strictement croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ x $		0	

EXEMPLE : On a $-67 < -4,3 < 0$ et la fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$, donc $|-67| > |-4,3|$.

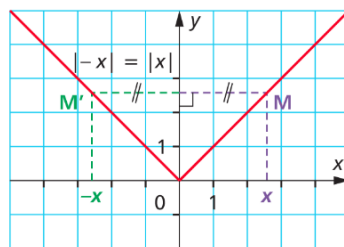
DÉMONSTRATION : Soit f la fonction valeur absolue et soit x et y deux réels tels que $x < y$.

- Si $0 \leq x < y$, alors $|x| = x$ et $|y| = y$. Il en résulte $f(y) - f(x) = |y| - |x| = y - x > 0$, d'où $f(x) < f(y)$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- Si $x < y \leq 0$, alors $|x| = -x$ et $|y| = -y$. Il en résulte $f(y) - f(x) = |y| - |x| = -y + x < 0$, d'où $f(x) > f(y)$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$.

Propriété 5

La courbe représentative de la fonction valeur absolue est **symétrique** par rapport à l'axe des **ordonnées**.

DÉMONSTRATION : Soit $M(x, |x|)$ un point de cette courbe représentative. On a $|-x| = |x|$, donc le point $M'(-x, |-x|)$ a la même ordonnée mais une abscisse opposée à M . Les deux points sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



EXERCICE 1

Représenter $x \mapsto |x|$ et exploiter ses variations

Énoncé

Soit f la fonction valeur absolue et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé (O, I, J) .

1. Tracer $\mathcal{C}$ à la main.

2. Dans chacun des cas suivants, comparer les réels x et y , puis vérifier graphiquement.

a. $x = |-0,92|$ et $y = |-1,3|$;

b. $x = |\pi - 3|$ et $y = |\pi - 2|$.

B - OPERATIONS SUR LES FONCTIONS ET VARIATIONS

Dans tout ce paragraphe, u désigne une fonction définie sur un intervalle I .

1 Somme d'une fonction et d'une constante

Soit k une constante.

Définition 5

La fonction $u + k$ est la fonction qui à chaque réel x associe le réel $u(x) + k$.

Propriété 6

Les fonctions u et $u + k$ ont les mêmes variations sur I .

DÉMONSTRATION : Soit x et y deux réels appartenant à I tels que $x < y$.

- Si u est croissante sur I , alors $u(x) \leq u(y)$, d'où $u(x) + k \leq u(y) + k$, donc $u + k$ est croissante sur I .
- Si u est décroissante sur I , alors $u(x) \geq u(y)$, d'où $u(x) + k \geq u(y) + k$, donc $u + k$ est décroissante sur I .

EXEMPLES : • La fonction $u : x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc la fonction $x \mapsto x^2 - 10$ est aussi croissante sur $[0 ; +\infty[$.

- La fonction $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $] -\infty ; 0[$, donc la fonction $u : x \mapsto \frac{1}{x} + 3,2$ est décroissante sur $] -\infty ; 0[$.

REMARQUE : On sait donc donner les variations d'une fonction de la forme $u + k$. Il n'en est pas de même d'une fonction $u + v$.

2 Multiplication d'une fonction par une constante

Soit λ une constante.

Définition 6

La fonction λu est la fonction qui à chaque réel x associe le réel $\lambda u(x)$.

Propriété 7

- Si $\lambda > 0$, les fonctions u et λu ont les **mêmes variations** sur I .
- Si $\lambda < 0$, les fonctions u et λu ont des **variations opposées** sur I .

DÉMONSTRATION : Soit x et y deux réels appartenant à I tels que $x < y$.

1^{er} Cas : $\lambda > 0$.

- Si u est croissante sur I , alors $u(x) \leq u(y)$, d'où $\lambda u(x) \leq \lambda u(y)$, donc λu est croissante sur I .
- Si u est décroissante sur I , alors $u(x) \geq u(y)$, d'où $\lambda u(x) \geq \lambda u(y)$, donc λu est décroissante sur I .

2^e Cas : $\lambda < 0$.

- Si u est croissante sur I , alors $u(x) \leq u(y)$, d'où $\lambda u(x) \geq \lambda u(y)$, donc λu est décroissante sur I .
- Si u est décroissante sur I , alors $u(x) \geq u(y)$, d'où $\lambda u(x) \leq \lambda u(y)$, donc λu est croissante sur I .

EXEMPLES : • La fonction $u : x \mapsto -3x + 4$ est décroissante sur $[1 ; 6[$, donc la fonction $x \mapsto -4(-3x + 4)$, c'est-à-dire, la fonction $x \mapsto 12x - 16$ est croissante sur $[1 ; 6[$.

- La fonction $u : x \mapsto -x^2$ est croissante sur $] -\infty ; 0[$, donc la fonction $u : x \mapsto -6x^2$ est croissante sur $] -\infty ; 0[$.

REMARQUE : On sait donc donner les variations d'une fonction de la forme λu . Il n'en est pas de même d'une fonction $u \times v$.

EXERCICE 2

Soit u et v deux fonctions définies sur l'intervalle $I =] -\infty ; 0]$ par :
 $u : x \mapsto -(x - 1)^2$ et $v : x \mapsto |x|$.

- Déterminer les variations des fonctions u et v sur I .
- Déterminer les variations des fonctions $f = u + 2$ et $g = v - 3$. Vérifier graphiquement.
- Déterminer les variations des fonctions $h = 0,5u$ et $i = -v$.

3 Racine carrée d'une fonction

Dans tout ce paragraphe, on suppose que la fonction u est positive sur I .

Définition 7

La fonction $\sqrt{u}$ est la fonction qui à chaque réel x associe le réel $\sqrt{u(x)}$.

Propriété 8

Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations sur I .

DÉMONSTRATION : Faisons par exemple la démonstration dans le cas où la fonction u est croissante sur I .

Soit x et y deux réels appartenant à I tels que $x < y$. Puisque u est croissante sur I , on a $u(x) \leq u(y)$. Comme par hypothèse $u(x)$ et $u(y)$ sont des réels positifs et comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$, on en déduit que $\sqrt{u(x)} \leq \sqrt{u(y)}$.

La fonction $\sqrt{u}$ est donc croissante sur I .

La démonstration est analogue si u est décroissante sur I .

EXEMPLE : La fonction $u : x \mapsto x^2 - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$, est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante $[0 ; +\infty[$. Pour définir $\sqrt{u}$, nous devons nous limiter à des intervalles sur lesquels u est positif. Or, $u(x) \geq 0$, si et seulement si x appartient à $]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$. La fonction $\sqrt{u}$ est donc décroissante sur $]-\infty ; -1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Attention :

ne pas oublier de respecter le domaine de définition de la fonction racine.

4 Inverse d'une fonction

Dans tout ce paragraphe, on suppose que la fonction u ne s'annule pas sur I .

Définition 8

La fonction $\frac{1}{u}$ est la fonction qui à chaque réel x associe le réel $\frac{1}{u(x)}$.

Propriété 9

Les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des variations opposées sur I .

DÉMONSTRATION : Faisons par exemple la démonstration dans le cas où la fonction u est décroissante sur I .

Considérons deux réels x et y appartenant à I tels que $x < y$. La fonction u est décroissante sur I , donc $u(x) \geq u(y)$. Puisque la fonction u ne s'annule pas sur I , on a $u(x) > 0$ et $u(y) > 0$, ou $u(x) < 0$ et $u(y) < 0$.

• Si $u(x) > 0$ et $u(y) > 0$, alors la fonction inverse étant décroissante sur $]0 ; +\infty[$,

on obtient : $\frac{1}{u(x)} \leq \frac{1}{u(y)}$.

• Si $u(x) < 0$ et $u(y) < 0$, alors la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$,

on obtient : $\frac{1}{u(x)} \leq \frac{1}{u(y)}$.

La fonction $\frac{1}{u}$ est donc croissante sur I . Les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont donc des variations opposées sur I .

EXEMPLES : La fonction $u : x \mapsto x^2 - 1$ est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$. $\frac{1}{u}$ n'est définie qu'en les réels x vérifiant $u(x) \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$. La fonction $\frac{1}{u}$ est donc croissante sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

Attention :

ne pas oublier de respecter le domaine de définition de la fonction inverse.

EXERCICE 3

1. Donner, lorsque c'est possible, les variations sur l'intervalle I des fonctions $\sqrt{u}$ suivantes :

- a. $u : x \mapsto \frac{1}{x}, I =]0 ; +\infty[$; b. $u : x \mapsto x - 4, I = [2 ; 3]$;
c. $u : x \mapsto 3x^2 + 1, I = [0 ; 1]$.

2. Donner, lorsque c'est possible, les variations sur l'intervalle I des fonctions $\frac{1}{u}$ suivantes :

- a. $u : x \mapsto x + 2, I = [1 ; 4]$; b. $u : x \mapsto x^2, I = [5 ; 6]$;
c. $u : x \mapsto 3 - x^2, I = [0 ; 2]$.