CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET

EXERCICE 4B.1

1. On a regroupé dans ce tableau l'âge des 11 joueurs d'une équipe de football :

x	32	21	34	31	27	26	25	30	29	23	30
x^2	1024	441	1156	961	729	676	625	900	841	529	900

a. Somme des âges : $32+21+34+31+27+26+25+30+29+23+30=308$

b. Moyenne des âges : $\bar{x}=\dfrac{308}{11}=28$

c. Somme des (âges)^2 : $1024+441+1156+961+729+676+625+900+841+529+900=8782$

d. Moyenne des (âges)^2 : $\dfrac{8782}{11}\simeq 798,36$

e. Variance : $V(x)=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-\left(\bar{x}\right)^2=798,36-28^2=14,36$

Ecart-type : $\sigma(x)=\sqrt{V(x)}\simeq 3,8$

2. Voici l'âge des 11 joueurs de l'équipe adverse :

x	29	27	30	29	29	25	30	26	29	24	30
x^2	841	729	900	841	841	625	900	676	841	576	900

a. Somme des âges : $29+27+30+29+29+25+30+26+29+24+30=308$

b. Moyenne des âges : $\bar{x}=\dfrac{308}{11}=28$

c. Somme des (âges)^2 : $841+729+900+841+841+625+900+676+841+576+900=8670$

d. Moyenne des (âges)^2 : $\dfrac{8670}{11}\simeq 788,18$

e. Variance : $V(x)=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-\left(\bar{x}\right)^2=788,18-28^2=4,18$

Ecart-type : $\sigma(x)=\sqrt{V(x)}\simeq 2,04$

EXERCICE 4B.2

a. Calculer pour chaque classe la moyenne et l'écart-type des notes.

IL EST HAUTEMENT CONSEILLE DE FAIRE UN TABLEAU ORDONNE POUR CHAQUE CLASSE

Pour la 1ère ES1 :

12	10	15	11	8	12	9	9	8	8	10	14	13	12	10	12	10
9	15	11	12	8	9	8	12	9	10	13	10	14	10	9	11	15

Notes	8	9	10	11	12	13	14	15
Effectifs	5	6	7	3	6	2	2	3

Moyenne : $\overline{x_1}=\dfrac{8\times5+9\times6+10\times7+11\times3+12\times6+13\times2+14\times2+15\times3}{5+6+7+3+6+2+2+3}=\dfrac{368}{34}\simeq 10,51$

Moyenne du carré des âges : $\dfrac{8^2\times5+9^2\times6+10^2\times7+11^2\times3+12^2\times6+13^2\times2+14^2\times2+15^2\times3}{5+6+7+3+6+2+2+3}$

$=\dfrac{64\times5+81\times6+100\times7+121\times3+144\times6+169\times2+196\times2+225\times3}{34}$

$=\dfrac{320+486+700+363+864+338+392+675}{34}=\dfrac{4138}{34}\simeq 121,71$

Variance : $V_1(x)=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-\left(\overline{x}\right)^2=121,71-10,51^2\simeq 11,25$

Ecart-type : $\sigma_1(x)=\sqrt{V(x)}\simeq 3,36$

Pour la 1ère ES2 :

17	10	16	6	13	12	9	6	6	16	8	15	10	17	7	16	6
11	6	6	12	10	7	12	16	13	12	7	13	9	14	7	17	14

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Effectifs	6	4	1	2	3	1	4	3	2	1	4	3

Moyenne : $\overline{x_2}=\dfrac{6\times 6+7\times 4+8\times 1+9\times 2+10\times 3+11\times 1+12\times 4+13\times 3+14\times 2+15\times 1+16\times 4+17\times 3}{6+4+1+2+3+1+4+3+2+1+4+3}$

$\overline{x_2}=\dfrac{387}{34}\simeq 11,38$

Moyenne du carré des âges :

$$\dfrac{6^2\times 6+7^2\times 4+8^2\times 1+9^2\times 2+10^2\times 3+11^2\times 1+12^2\times 4+13^2\times 3+14^2\times 2+15^2\times 1+16^2\times 4+17^2\times 3}{6+4+1+2+3+1+4+3+2+1+4+3}$$

$$=\dfrac{36\times 6+49\times 4+64+81\times 2+100\times 3+121+144\times 4+169\times 3+196\times 2+225+256\times 4+289\times 3}{34}$$

$$=\dfrac{216+196+64+162+300+121+576+507+392+225+1024+867}{34}=\dfrac{4650}{34}\simeq 136,76$$

Variance : $V_2(x)=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-\left(\overline{x}\right)^2=136,76-11,38^2=7,2556$

Ecart-type : $\sigma_2(x)=\sqrt{V(x)}\simeq 2,69$

Pour la 1ère ES3 :

17	16	5	6	16	6	5	7	13	18	18	10	15	19	9	18	5
18	13	11	7	13	17	10	7	14	13	19	8	14	9	17	12	10

Notes	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Effectifs	3	2	3	1	2	3	1	1	4	2	1	2	3	4	2

Moyenne :

$$\overline{x_3}=\dfrac{5\times 3+6\times 2+7\times 3+8\times 1+9\times 2+10\times 3+11\times 1+12\times 1+13\times 4+14\times 2+15\times 1+16\times 2+17\times 3+18\times 4+19\times 2}{3+2+3+1+2+3+1+1+4+2+1+2+3+4+2}$$

$$\overline{x_3}=\dfrac{15+12+21+8+18+30+11+12+52+28+15+32+51+72+38}{34}=\dfrac{415}{34}\simeq 12,21$$

Moyenne du carré des âges :

$$\dfrac{5^2\times 3+6^2\times 2+7^2\times 3+8^2+9^2\times 2+10^2\times 3+11^2+12^2+13^2\times 4+14^2\times 2+15^2+16^2\times 2+17^2\times 3+18^2\times 4+19^2\times 2}{3+2+3+1+2+3+1+1+4+2+1+2+3+4+2}$$

$$=\dfrac{75+72+147+64+162+300+121+144+169\times 4+196\times 2+225+256\times 2+289\times 3+324\times 4+361\times 2}{34}$$

$$=\dfrac{147+147+64+162+300+265+676+392+225+512+867+1296+722}{34}=\dfrac{5775}{34}\simeq 169,85$$

Variance : $V_3(x)=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-\left(\overline{x}\right)^2=169,85-12,21^2=20,7659$

Ecart-type : $\sigma_3(x)=\sqrt{V(x)}\simeq 4,56$

b. Quelle interprétation de ces résultats peut-on faire ?

1) la classe dans laquelle les notes sont les plus basses a la plus forte moyenne.
2) Il est logique que la classe ES3 ait la plus grand écart-type, mais l'écart-type de la classe ES1 est supérieur à celui de la ES2 alors que les notes sont moins étendues.

EXERCICE 4B.3

Une menuiserie doit livrer des madriers de 90 millimètres d'épaisseur en moyenne, à l'aide de deux machines. La *machine 1* produit 20 poutres dont voici les épaisseurs :

89,2 90,0 89,7 90,3 89,3 90,4 90,7 90,0 90,5 89,1 89,8 89,7 89,9 90,3 90,0 90,3 90,6 89,6 90,5 90,0

Pendant ce temps, 20 poutres sont produites par la *machine 2* :

89,8 90,4 90,0 89,7 89,9 89,8 90,2 90,3 89,7 90,0 89,9 90,3 90,3 90,1 90,3 90,3 89,8 89,7 90,2 89,8

a. Déterminer l'épaisseur moyenne de chaque palette, en arrondissant au dixième. Les machines sont-elles bien réglées ?

$$89,2+90+89,7+90,3+89,3+90,4+90,7+90+90,5+89,1=899,2$$

$$\overline{x_1}=\frac{899,2+89,8+89,7+89,9+90,3+90+90,3+90,6+89,6+90,5+90}{20}=\frac{899,2+900,7}{20}=\frac{1799,9}{20}=89,995$$

Soit $\overline{x_1}\simeq 90$ (arrondi au dixième)

$$89,8+90,4+90,0+89,7+89,9+89,8+90,2+90,3+89,7+90,0=899,8$$

$$\overline{x_2}=\frac{899,8+89,9+90,3+90,3+90,1+90,3+90,3+89,8+89,7+90,2+89,8}{20}=\frac{899,8+900,1}{20}=\frac{1799,9}{20}=89,995$$

Soit $\overline{x_2}\simeq 90$ (arrondi au dixième)

b. Déterminer l'écart-type de l'épaisseur des madriers de chaque palette. Quelle machine semble la plus efficace ?

Première machine :

$$89,2^2+90^2+89,7^2+90,3^2+89,3^2+90,4^2+90,7^2+90^2+90,5^2+89,1^2$$
$$=7956,64+8100+8046,09+8154,09+7974,49+8172,16+8226,49+8100+8190,25+7938,81$$
$$=80859,02$$

$$89,8^2+89,7^2+89,9^2+90,3^2+90^2+90,3^2+90,6^2+89,6^2+90,5^2+90^2$$
$$=8064,04+8046,09+8082,01+8154,09+8100+8154,09+8208,36+8028,16+8190,25+8100$$
$$=81127,09$$

$$V_1(x)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\overline{x_1}\right)^2=\frac{80859,02+81127,09}{20}-89,995^2=8099,3055-8099,1=0,2055$$

$$\sigma_1(x)=\sqrt{V_1(x)}=\sqrt{0,2055}\simeq 0,45\text{ mm}$$

Deuxième machine :

$$89,8^2+90,4^2+90^2+89,7^2+89,9^2+89,8^2+90,2^2+90,3^2+89,7^2+90^2=80\,964,56$$

$$89,9^2+90,3^2+90,3^2+90,1^2+90,3^2+90,3^2+89,8^2+89,7^2+90,2^2+89,8^2=81\,126,59$$

$$V_2(x)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\overline{x_2}\right)^2=\frac{80\,964,56+81\,126,59}{20}-89,995^2=8104,5575-8099,1=5,4575$$

$$\sigma_2(x)=\sqrt{V_2(x)}=\sqrt{5,4575}\simeq 2,34\text{ mm}$$

La première machine semble la plus efficace.

EXERCICE 4B.4

Une usine produit des bouteilles d'eau minérale, qui sont ensuite regroupées par palettes de 25 unités.
Sur chaque palette il y a un certain nombre de bouteilles qui, pour des raisons diverses (cabossées, mal remplies, trouées) sont ensuite impropres à la vente.
On a réalisé un test sur 100 palettes et voici les résultats :

Nombre de bouteilles défectueuses	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…	25
Nombre de packs concernés	69	26	4	1	0	0	0	0	0	0	0

a. Nombre moyen de bouteilles défectueuses par palette :

$$\bar{x} = \frac{0\times 69+1\times 26+2\times 4+3\times 1}{69+26+4+1} = \frac{26+8+3}{100} = \frac{37}{100} = 0,37$$

Il y a en moyenne 0,37 bouteille défectueuse par palette.

b. Déterminer l'écart-type du nombre moyen de bouteilles défectueuses par palette.

Calcul de la variance :

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i^2 - \left(\bar{x}\right)^2 = \frac{69\times 0^2+26\times 1^2+4\times 2^2+1\times 3^2}{69+26+4+1} - 0,37^2 = \frac{26+4\times 4+9}{100} - 0,37^2$$

$$= \frac{51}{100} - 0,1369 = 0,51 - 0,1369 = 0,3731$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0,3731} \simeq 0,61$$