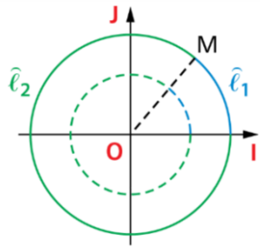
§4 TRIGONOMETRIE

A - LE RADIAN

1 Une nouvelle unité



Définition 1

Un angle de 1 radian est un angle au centre qui intercepte, sur un cercle de rayon 1, un arc de longueur égale à 1.

Note : *le symbole du radian est rad.*

REMARQUES : • On confond grâce à cette unité, une longueur et un angle sur le cercle $\mathscr{C}$.
• Sur la figure, le point M définit deux angles au centre $\widehat{IOM}$: l'angle saillant (compris entre 0° et 180°) de mesure en radian égale à la longueur ℓ_1 de l'arc bleu $\widehat{\ell_1}$ et un angle rentrant (compris entre 180° et 360°) de mesure en radian égale à la longueur ℓ_2 de l'arc vert $\widehat{\ell_2}$.

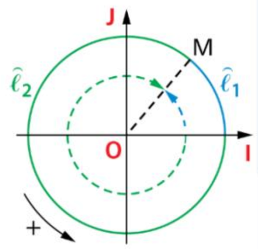
Histoire : *le radian a été introduit en France par le décret du 3 mai 1961 sur les unités de mesure.*

$\widehat{IOM}$ (en radian) $= \dfrac{2\pi}{360} \times \widehat{IOM}$ (en dégré), d'où 1 rad $= \dfrac{180}{\pi} \approx 57{,}3°$.

2 Cercle trigonométrique

Note : *le sens trigonométrique est le sens inverse des aiguilles d'une montre.*

Dans tout le chapitre, on appellera $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O, de rayon unité et de sens positif (on dit aussi sens direct ou trigonométrique).



3 Angles orientés et mesure principale

Définition 2

À un point M de $\mathscr{C}$, on associe les mesures de l'**angle orienté** $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ suivantes :
- Si on parcourt $\mathscr{C}$ de I à M dans le **sens direct**, alors $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \ell_1 + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{N}$.
- Si on parcourt $\mathscr{C}$ de I à M dans le **sens indirect**, alors $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = -\ell_2 - k' \times 2\pi$, avec $k' \in \mathbb{N}$.

REMARQUES : • La mesure d'un angle orienté est précédée d'un signe moins lorsqu'on se déplace dans le sens indirect sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
• Les nombres k et k' correspondent aux nombres de tours que l'on effectue pour aller de I à M soit dans le sens direct, soit dans le sens indirect.

Propriété 1

On peut exprimer l'ensemble de toutes les mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ sous la forme : $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \ell_1 + k \times 2\pi$ rad, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 3

Un angle orienté possède une unique **mesure principale** dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

REMARQUE : La mesure principale correspond à la longueur du plus petit arc joignant I à M sur le cercle $\mathscr{C}$ précédée du signe plus si le point M est sur le demi-cercle supérieur ou du signe moins s'il est sur le demi-cercle inférieur.

EXEMPLE : La mesure principale de $\dfrac{5\pi}{3}$ est $-\dfrac{\pi}{3}$ car $\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{6\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$.

EXERCICE 1

Manipuler les radians

Énoncé

Convertir en radian ou en degré chacun des angles suivants :

a. $150°$; **b.** $\frac{4\pi}{3}$ rad ; **c.** $75°$;

d. $\frac{7\pi}{6}$; **e.** $315°$.

Méthode

On utilise la formule du cours :

$\widehat{IOM}$ (en radian) $= \frac{2\pi}{360} \times \widehat{IOM}$ (en degré).

EXERCICE 2

Déterminer la mesure principale d'un angle orienté

Énoncé

Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés ci-dessous :

a. $\frac{31\pi}{6}$; **b.** $-\frac{15\pi}{4}$; **c.** $-2\,011\pi$.

Méthode

❶ On effectue la division euclidienne de l'angle x par 2π :
$x = x_0 + k \times 2\pi$ où k appartient à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et $x_0 \in [0\ ;\ 2\pi[$.

Remarque : La division euclidienne par 2π revient à trouver le quotient entier de $\frac{x}{2\pi}$, c'est-à-dire l'unique k entier relatif tel que $k \leqslant \frac{x}{2\pi} < k + 1$.

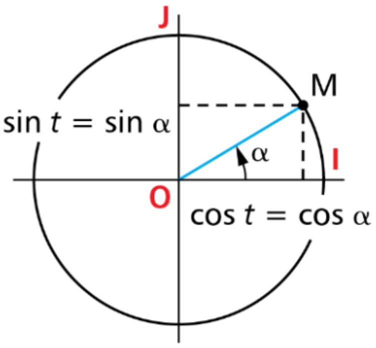
❷ • Si $x_0 \in [0\ ;\ \pi]$, alors x_0 est la mesure principale.

• Si $x_0 \in]\pi\ ;\ 2\pi[$, alors $x_1 = x_0 - 2\pi$ ($x_1 \in]-\pi\ ;\ \pi]$) est la mesure principale.

B - COSINUS ET SINUS D'UN REEL

1 Point sur le cercle trigonométrique

- Dans un repère orthonormé (O, I, J), pour tout réel t, il existe un unique point M correspondant sur le cercle $\mathscr{C}$.
- La mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est égale à t.
- M a pour abscisse $\cos t$ et pour ordonnée $\sin t$.

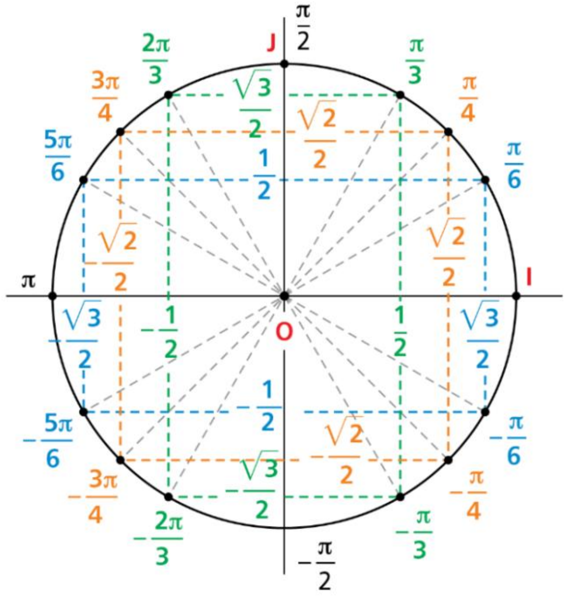


Remarque : Sur la figure ci-contre, α est la mesure principale correspondant au réel t. Pour un réel $t + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on obtiendra la même mesure principale et donc les mêmes coordonnées $\cos t$ et $\sin t$.

Important : *les valeurs remarquables entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ sont à connaître par cœur.*

2 Les valeurs remarquables

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



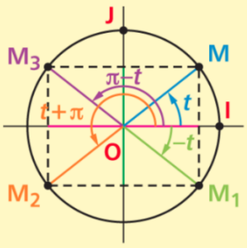
3 Angles associés

Ce sont des angles dont le cosinus et le sinus s'expriment en fonction de cos t ou de sin t.

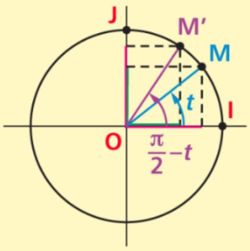
Propriétés 2

On a les relations suivantes :

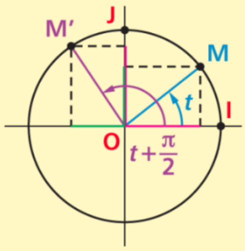
① $\begin{cases}\cos(-t) = \cos t \\ \sin(-t) = -\sin t\end{cases}$ ② $\begin{cases}\cos(\pi + t) = -\cos t \\ \sin(\pi + t) = -\sin t\end{cases}$ ③ $\begin{cases}\cos(\pi - t) = -\cos t \\ \sin(\pi - t) = \sin t\end{cases}$



④ $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t\end{cases}$



⑤ $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t\end{cases}$



EXERCICE 3

Exploiter les formules des angles associés

Énoncé

Connaissant le cosinus et le sinus de l'angle $\frac{\pi}{3}$, en déduire les valeurs du cosinus et du sinus des angles suivants :

a. $\frac{2\pi}{3}$; **b.** $\frac{5\pi}{6}$.

Méthode

❶ Le cercle trigonométrique aide à trouver la relation entre l'angle que l'on cherche et l'angle dont on connaît le cosinus et le sinus.

❷ À l'aide des valeurs remarquables des angles entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et des formules des angles associés (voir propriétés 2), on peut retrouver les autres valeurs remarquables

EXERCICE 4

Déterminer les valeurs du sinus et du cosinus d'un angle

Énoncé

Trouver les valeurs du cosinus et du sinus des angles suivants :

a. $\frac{9\pi}{2}$; **b.** $\frac{8\pi}{3}$.

C - EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

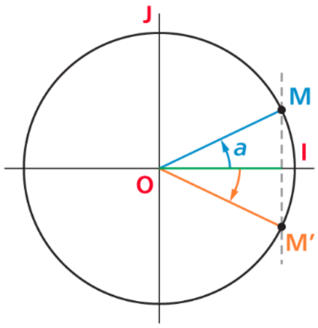
1 De la forme cos x = cos a

Propriété 3

L'équation **cos x = cos a** pour solutions $\boldsymbol{x = a + k \times 2\pi}$ ou $\boldsymbol{x = -a + k \times 2\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

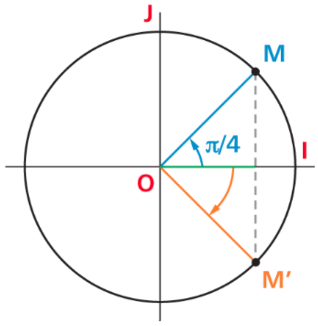
Important : *il faut donc connaître les valeurs remarquables de la figure du* ***B2****.*

Remarques : • Graphiquement il existe deux points M et M' (symétriques par rapport à (OI)) sur le cercle $\mathscr{C}$ qui correspondent à des angles qui ont le même cosinus.
On retrouve ainsi la formule des angles associés :
cos $(-t)$ = cos (t).
• Attention, la calculatrice ne donne que la solution dans l'intervalle $[0 ; \pi]$.



Exemple : L'équation $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$ a pour solutions dans $\mathbb{R}$,

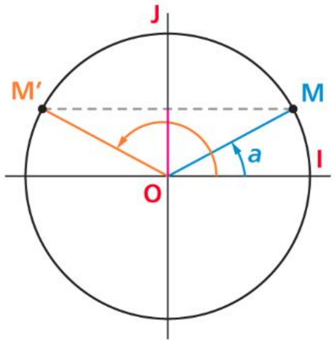
$x = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



2 De la forme sin *x* = sin *a*

Propriété 4 L'équation **sin *x* = sin *a*** pour solutions $x = a + k \times 2\pi$ ou $x = \pi - a + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

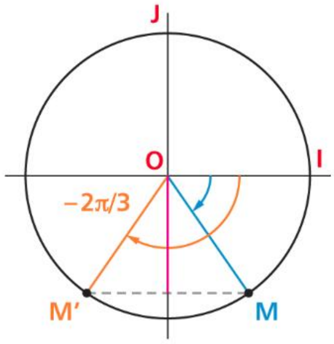
REMARQUES : • Graphiquement il existe deux points M et M' (symétriques par rapport à (OJ)) sur le cercle $\mathscr{C}$ qui correspondent à des angles qui ont le même sinus.
On retrouve ainsi la formule des angles associés :
$\sin(\pi - t) = \sin(t)$.
• Attention, la calculatrice ne donne que la solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.



EXEMPLE : $\sin x = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ a pour solutions dans $\mathbb{R}$,

$x = -\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi$ ou

$x = \pi + \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi = \frac{5\pi}{3} + k \times 2\pi = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



EXERCICE 5

Résoudre une équation de la forme cos *x* = cos *a* ou sin *x* = sin *a*

Énoncé

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : **a.** $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$; **b.** $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$.

2. Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$, $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$.

Méthode

- On applique les propriétés 3 et 4 du cours.
- Si *a* n'est pas dans $]-\pi ; \pi]$, on déterminera sa mesure principale.

EXERCICE 6

Résoudre une équation de la forme cos *x* = *b* ou sin *x* = *b*

Énoncé

Résoudre les équations suivantes : **a.** $\cos x = 0{,}5$; **b.** $\cos x = 0{,}3$.