Le second degré

Table des matières

1 La forme canonique du trinôme

1.1 Le trinôme du second degré

Définition 1 : On appelle trinôme du second degré ou simplement trinôme, le polynôme $P(x)$, à coefficients réels, de la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

Exemple : Les trois polynômes suivants sont des trinômes

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^2 + 2x - 8 \\ P_2(x) &= 2x^2 + 3x - 14 \\ P_3(x) &= -x^2 + 4x - 5 \end{aligned}$$

1.2 Quelques exemples de formes canoniques

La forme canonique d'un trinôme est une forme à partir de laquelle on peut savoir si le trinôme peut se factoriser ou non. Cette forme est obtenue à partir d'une "*astuce*" qui consiste à rajouter un terme puis à l'ôter de façon à obtenir le début d'un carré parfait.

Exemple : Soit $P_1(x) = x^2 + 2x - 8$

Les deux premiers termes sont $x^2 + 2x$ qui est le début de $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. On ajoute 1 puis on le soustrait, ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 8 \\ &= (x+1)^2 - 9 \qquad \text{forme canonique de } P_1(x) \end{aligned}$$

on peut, à partir de cette forme, factoriser. Cela donne :

$$\begin{aligned} &= (x+1)^2 - 3^2 \\ &= (x+1-3)(x+1+3) \\ &= (x-2)(x+4) \end{aligned}$$

Exemple : Soit $P_2(x) = 2x^2 + 3x - 14$

On factorise par le coefficient devant x^2, c'est à dire ici 2.

$$P_2(x) = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 7\right)$$

$\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right)$ est le début de $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$. Cela donne :

$$\begin{aligned} &= 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - 7\right) \\ &= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 7\right] \\ &= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{121}{16}\right] \qquad \text{forme canonique de } P_2(x) \end{aligned}$$

on peut, à partir de cette forme, factoriser. Cela donne :

$$\begin{aligned}
&= 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{11}{4}\right)^2\right]\\
&= 2\left(x+\frac{3}{4}-\frac{11}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}+\frac{11}{4}\right)\\
&= 2\,(x-2)\left(x+\frac{7}{2}\right)
\end{aligned}$$

Exemple : Soit $P_3(x) = -x^2 + 4x - 5$

On factorise par le coefficient devant x^2, c'est à dire ici -1.

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= -\left(x^2-4x+5\right)\\
&\left(x^2-4x\right) \text{ est le début de } (x-2)^2 = x^2-4x+4. \text{ Cela donne :}\\
&= -\left(x^2-4x\color{red}{+4-4}+5\right)\\
&= -\left[(x-2)^2-4+5\right]\\
&= -\left[(x-2)^2+1\right] \qquad \text{forme canonique de } P_2(x)
\end{aligned}$$

On ne peut factoriser cette forme car somme de deux carrés

1.3 Forme canonique du trinôme

Soit un trinôme du second degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$

On factorise par $a \neq 0$, cela donne :

$$\begin{aligned}
P(x) &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&x^2+\frac{b}{a}x \text{ est le début de } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}. \text{ Cela donne :}\\
&= a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x\color{red}{+\frac{b^2}{4a^2}}\right)\color{red}{-\frac{b^2}{4a^2}}+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

Théorème 1 : La forme canonique d'un trinôme du second degré est de la forme :

$$P(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

⚠ Dans un cas concret, on n'utilise pas cette formule un peu difficile à mémoriser, mais on retient l'astuce qui consiste à ajouter puis soustraire un terme comme nous l'avons vu dans les exemples précédents.

2 Racines du trinôme

2.1 Définition

Définition 2 : Les racines d'un trinômes ou "*zéros*" sont les solutions de l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Définition 3 : On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé **discriminant**

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ devient en utilisant la forme canonique :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

Le nombre de racines du trinôme dépend du signe de Δ, d'où **discriminant**.

2.2 Le discriminant est positif

Comme le discriminant Δ est positif, la forme canonique se factorise en :

$$a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

On obtient alors deux solutions :

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

Soit, en appelant x_1 et x_2 les deux solutions

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 + 3x - 14 = 0$

- On calcule Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times (-14) = 9 + 112 = 121 = 11^2$
- $\Delta > 0$, il existe deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 11}{4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 11}{4} = -\frac{7}{2}$$

- On conclut par : $S = \left\{-\frac{7}{2}\,;\,2\right\}$

2.3 Le discriminant est nul

Comme le discriminant Δ est nul, la forme canonique correspond à un carré parfait. Elle se factorise en :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

On obtient alors qu'une seule solution : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3x^2-18x+27=0$

- On calcule Δ : $\Delta=b^2-4ac=18^2-4\times3\times27=324-324=0$
- $\Delta=0$, il n'existe qu'une seule solution x_0 : $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{18}{6}=3$
- On conclut par : $S=\{3\}$

2.4 Le discriminant est négatif

Comme le discriminant Δ est négatif la forme canonique ne se factorise pas. Il n'y a donc aucune solution à l'équation du second degré.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $-x^2+4x-5=0$

- On calcule Δ : $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times(-1)\times(-5)=16-20=-4$
- $\Delta<0$, il n'y a pas de solution.
- On conclut par : $S=\varnothing$

2.5 Conclusion

Théorème 2 : Le nombre de racines du trinôme du second degré dépend du signe du discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta>0$ il existe deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\quad\text{ou}\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta=0$ il n'existe qu'une racine (appelée racine double) :

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta<0$ il n'existe aucune racine réelle.

⚠ Lorsque l'on pourra factoriser le trinôme, on ne calculera pas le discriminant. On factorisera, puis on annulera chaque facteur.

Exemple : Déterminer les solutions des équations suivantes :

a) $4x^2-25=0$ b) $9x^2-6x+1=0$

a) L'équation se factorise en utilisant la différence de deux carrés :

$$4x^2 - 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x-5)(2x+5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = -\frac{5}{2}$$

b) L'équation correspond à un carré parfait :

$$9x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

Algorithme : On peut proposer l'algorithme suivant pour résoudre l'équation :

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

Comme il y a trois cas à analyser, il faut utiliser deux "*Si*".

On appelle les deux solutions, lorsqu'elles existent X et Y.

⚠ Nous sommes dans le cas d'un trinôme $A \neq 0$.

```
Variables : A ≠ 0, B, C, X, Y, Δ réels
Entrées et initialisation
    Lire A, B, C
    B² − 4AC → Δ
Traitement et sorties
    si Δ > 0 alors
        (−B + √Δ)/(2A) → X
        (−B − √Δ)/(2A) → Y
        Afficher X, Y
    sinon
        si Δ = 0 alors
            −B/(2A) → X
            Afficher X
        sinon
            Afficher "Pas de Solution"
        fin
    fin
```

3 Factorisation, somme et produit des racines

3.1 Factorisation du trinôme

Si le discriminant est positif. Nous avons vu que le trinôme se factorise en :

$$a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

En remplaçant par les racines x_1 et x_2, nous avons alors : $a(x - x_1)(x - x_2)$

De même si le discriminant est nul. Nous avons vu que le trinôme se factorise en :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

En remplaçant par la racine $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, nous avons alors : $a(x - x_0)^2$

Exemples :

a) Factoriser le trinôme suivant : $P(x) = 2x^2 + 3x - 14$

D'après le paragraphe précédent, les racines de ce trinôme sont : $-\dfrac{7}{2}$ et 2 , donc :

$$P(x) = 2\left(x + \frac{7}{2}\right)(x - 2)$$

Nous retrouvons la factorisation avec la forme canonique.

b) Factoriser le trinôme suivant : $Q(x) = 3x^2 - 18x + 27$

D'après le paragraphe précédent, l'unique racine de ce trinôme est 3 , donc :

$$Q(x) = 3(x-3)^2$$

⚠ La racine $x = 3$ est une racine double car on peut factoriser par $(x-3)^2$

Théorème 3 : Lorsque le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet :

- deux racines x_1 et x_2, alors : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- admet une racine x_0 , alors : $P(x) = a(x - x_0)^2$
- n'admet pas de racine, il ne peut pas se factoriser.

3.2 Somme et produit des racines

Soit le trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$. Nous nous plaçons dans le cas où $\Delta > 0$.
Il y a donc deux racines x_1 et x_2. Le trinôme peut alors se factoriser en :

$$T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Développons le trinôme :

$$T(x) = a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1x_2\right] = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2$$

On pose $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1x_2$, on a alors : $T(x) = ax^2 - aSx + aP$

En identifiant à : $T(x) = ax^2 + bx + c$, on obtient alors :

$$-aS = b \quad \Rightarrow \quad S = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad aP = c \quad \Rightarrow \quad P = \frac{c}{a}$$

Exemple : Soit le trinôme $T(x) = 2x^2 + 3x - 14$

Nous savons que ce trinôme admet deux solutions $-\frac{7}{2}$ et 2, d'après notre résultat :

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \quad \text{ce qui se vérifie} \quad -\frac{7}{2} + 2 = -\frac{-7+4}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{14}{2} = -7 \quad \text{ce qui se vérifie} \quad -\frac{7}{2} \times 2 = -7$$

Théorème 4 : Si un trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines, alors la somme S et le produit P des racines sont égales à :

$$S = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad P = \frac{c}{a}$$

3.3 Application

Parfois, certaines équations admettent des solutions très simples que l'on appellent "*racines évidentes*". Lorsque l'on connaît une telle solution, le produit des racines permet alors de trouver la seconde.

Exemples :

1) Résoudre l'équation : $2x^2 - 5x + 3 = 0$

- $x_1 = 1$ est racine évidente car $2(1)^2 - 5(1) + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$
- $P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = \dfrac{3}{2}$

$$S = \left\{1\ ;\ \frac{3}{2}\right\}$$

2) Résoudre l'équation : $5x^2 + 2x - 3 = 0$

- $x_1 = -1$ est racine évidente car $5(-1)^2 + 2(-1) - 3 = 5 + 2 - 3 = 0$
- $P = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{3}{5}$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = \dfrac{3}{5}$

$$S = \left\{-1\ ;\ \frac{3}{5}\right\}$$

4 Signe du trinôme et inéquation du second degré

4.1 Le discriminant est positif

Si $\Delta > 0$, le trinôme se factorise en : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

En supposant que $x_1 \geqslant x_2$, dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x - x_2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		**signe de a**	0	**signe de $-a$**	0	**signe de a**	

Conclusion : Le signe du trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur.

Exemple : Signe de $-3x^2 + 7x + 6$

Il n'y pas de racine immédiate, calculons alors de discriminant :

$$\Delta = 7^2 - 4(-3)(6) = 49 + 72 = 121 = 11^2$$

Comme le discriminant est positif, le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-7 + 11}{-6} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-7 - 11}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$

Comme le coefficient devant x^2 est négatif (-3), le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif à l'intérieur.

Nous avons alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		3		$+\infty$
$-3x^2+7x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4.2 Le discriminant est nul ou négatif

Si $\Delta = 0$, le trinôme se factorise en : $P(x) = a(x - x_0)^2$

Comme $(x - x_0)^2$ est un carré, il est soit nul soit positif. Donc le trinôme est soit nul soit du signe de a.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$a(x-x_0)^2$		**signe de a**	0	**signe de a**	

Si le discriminant est négatif, il n'a donc pas de racine. Il possède donc un signe constant. On montre alors qu'il est du signe de a.

4.3 Conclusion

Théorème 5 : Le signe du trinôme dépend du discriminant :

- Si $\Delta > 0$, par rapport au racines,
  le trinôme est du signe de a à l'**extérieur** et du signe de $-a$ à l'**intérieur**.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme est soit nul, soit du signe de a.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme est toujours du signe de a.

5 Représentation de la fonction trinôme

Théorème 6 : La représentation de la fonction trinôme f est une parabole $\mathscr{P}$ dont les caractéristiques dépendent du signe du coefficient a et du signe du discriminant Δ.

Les coordonnées du sommet S de la parabole sont : $\text{S}\left(-\dfrac{b}{2a}\,;-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

Démonstration : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$
La forme canonique de la fonction f est donc :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

On pose alors : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

On a donc : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ ⚠ on retrouve le résultat de seconde

Les variations de la fonction f dépendent du coefficient a :

- $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

La parabole est dirigée vers le haut

- $a < 0$

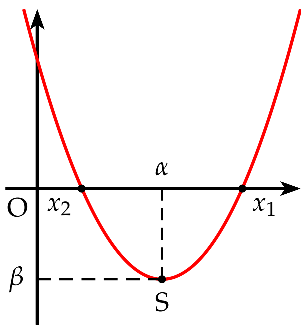
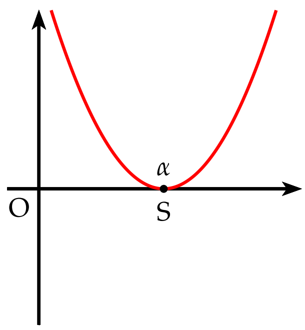
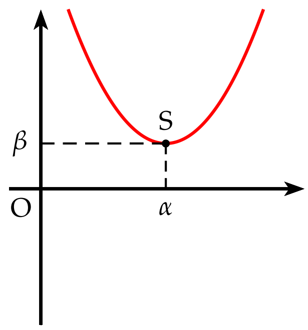
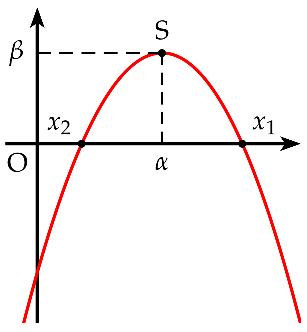
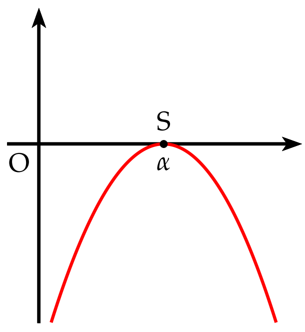
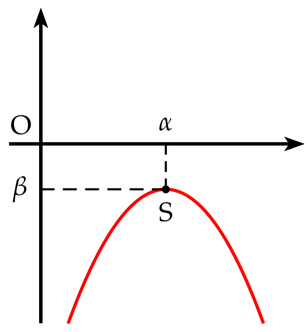
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

La parabole est dirigée vers le bas

Les coordonnées du sommet S sont donc : $S(\alpha\ ;\ \beta)$

- Si $\Delta > 0$ la parabole coupe deux fois l'axe des abscisses.
- Si $\Delta = 0$ la parabole est tangente à l'axe des abscisses.
- Si $\Delta < 0$ la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

On peut résumer ces résultats par le tableau suivant :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

6 Équation paramétrique

Définition 4 : On appelle équation **paramétrique** de paramètre m, une équation d'inconnue x dont on se propose de déterminer le nombre de solutions, leur signe, etc. suivant les valeurs du paramètre m.

Exemple : Déterminer le nombre de solutions de l'équation paramétrique suivante selon les valeurs de m, puis visualiser les résultats obtenus. Montrer que toutes les courbes passent par un point que l'on déterminera.

$$(m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0 \qquad (E_m)$$

Pour que cette équation soit du second degré, il faut que le coefficient devant x^2 soit non nul. Sinon l'équation est du premier degré.

1) Si $m = 1$, alors l'équation est du premier degré : $-2x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow$ soit $x = 2$

2) Si $m \neq 1$, l'équation est du second degré. On détermine alors le discriminant en fonction de m.

$$\Delta = 4m^2 - 4(m-1)(m+3) = 4(m^2 - m^2 - 3m + m + 3) = 4(-2m+3)$$

Le nombre de solutions est fonction du signe de Δ. Il faut donc déterminer le signe du discriminant.

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2m + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \text{ soit } m = \frac{3}{2}$$

On fait alors un tableau de signe, en indiquant le nombre de solutions

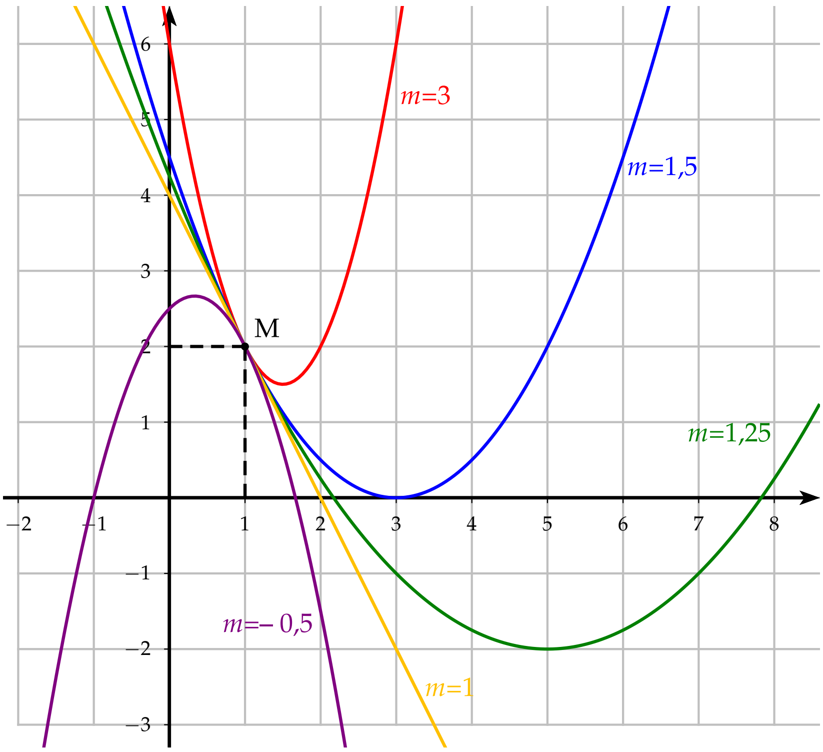
m	$-\infty$	1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Δ	$+$	$\|$	$+$	0	$-$
Nombre de solutions	2 solutions x_1 et x_2	1^{er} degré 1 sol	2 solutions x_1 et x_2	1 sol dou-ble x_0	pas de solution

3) Cette équation admet deux solutions, ssi : $m \in \left]-\infty\,;\,1\right[\cup \left]1\,;\,\frac{3}{2}\right[$

Pour visualiser les résultats obtenus, on trace des courbes représentants la famille des trinômes suivants :

$$P_m(x) = (m-1)x^2 - 2mx + m + 3$$

On prend par exemple : $m = -0,5$, $m = 1$, $m = 1,25$, $m = 1,5$ et $m = 3$.
On obtient alors :



On observe alors que toutes les courbes semblent passer par le point M$(1\,;\,2)$.
Montrons cette conjecture.
Pour que cette conjecture soit vraie, il faut que : $\forall m \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad P_m(1) = 2$
Calculons alors $P_m(1)$:

$$P_m(1) = (m-1) \times 1^2 - 2m \times 1 + m + 3 = m - 1 - 2m + m + 3 = 2$$

$P_m(1) = 2$ pour toutes les valeurs de m.
Toutes les courbes passent donc par le le point M$(1\,;\,2)$.

7 Équation, inéquation se ramenant au second degré

7.1 Équation rationnelle

Soit à résoudre l'équation : $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{2x-5} = \dfrac{9}{4}$

- On détermine d'abord l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-2\,;\,\dfrac{5}{2}\right\}$
- En multipliant l'équation par le dénominateur commun $4(x+2)(2x-5)$

$$\begin{aligned} x \in D_f, \qquad 4(2x-5) - 8(x+2) &= 9(x+2)(2x-5) \\ 8x - 20 - 8x - 16 &= 18x^2 - 45x + 36x - 90 \\ -18x^2 + 9x + 54 &= 0 \\ (\div 9) \qquad -2x^2 + x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 2$ racine évidente car $-2 \times 2^2 + 2 + 6 = 0$

Le produit des racines $P = \dfrac{6}{-2} = -3$ donc on a $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = -\dfrac{3}{2}$

Comme $2 \in D_f$ et $-\dfrac{3}{2} \in D_f$, on a alors : $S = \left\{-\dfrac{3}{2}\,;\,2\right\}$

7.2 Inéquation rationnelle

Soit à résoudre l'inéquation : $\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2} \geqslant 0$

- On détermine d'abord l'ensemble de définition de l'inéquation :
  Il faut déterminer les racines de $x^2+x-2=0$
  $x_1 = 1$ est racine évidente car $1^2+1-2=0$
  Le produit des racines $P=-2$, donc $x_2=-2$
  On conclut que l'ensemble de définition est : $D_f = \mathbb{R} - \{-2\,;\,1\}$
- Racines de $2x^2+5x+3=0$
  $x_1=-1$ est racine évidente car $2\times(-1)^2-5+3=0$
  Le produit des racines $P=\dfrac{3}{2}$, donc $x_2=-\dfrac{3}{2}$
- On remplit un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$2x^2+5x+3$		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
x^2+x-2		+	0	−	|	−	|	−	0	+	
$\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2}$		+	||	−	0	+	0	−	||	+	

La solution est donc : $S =]-\infty\,;-2[\, \cup \left[-\dfrac{3}{2}\,;-1\right] \cup\,]1\,;+\infty[$

7.3 Équation bicarrée

Définition 5 : On appelle équation bicarrée, une équation de la forme :

$$ax^4+bx^2+c=0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

On effectue le changement de variable suivant : $X=x^2$ avec $X \geqslant 0$
L'équation devient alors : $aX^2+bX+c=0$
On résout en X puis on revient à x en résolvant $x^2=X$

Exemple : Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante : $x^4-5x^2-36=0$
On pose $X=x^2$ avec $X \geqslant 0$, l'équation devient : $X^2-5X-36=0$
On calcule le discriminant : $\Delta = 25+4\times 36 = 169 = 13^2$
Comme $\Delta > 0$, on a deux racines : $X_1 = \dfrac{5+13}{2} = 9$ et $X_2 = \dfrac{5-13}{2} = -4$
On ne retient que X_1, car c'est la seule racine positive.
On revient à x : $x^2=9 \quad \Leftrightarrow \quad x=3$ ou $x=-3$
L'ensemble solution est donc : $S=\{-3\,;\,3\}$

7.4 Somme et produit de deux inconnues

Soit le système suivant : $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$

Ce système est symétrique, car on peut intervertir x et y sans que cela ne change le système. Cela veut dire que si le couple (a, b) est solution alors le couple (b, a) l'est également.

Ce système revient à résoudre une équation du second degré où x et y seront les solutions de cette équation. S représente la somme des racines et P leur produit. On doit donc résoudre :

$$X^2 - SX + P = 0$$

Exemple : Soit à résoudre le système suivant : $\begin{cases} x+y=18 \\ xy=65 \end{cases}$

x et y sont donc les racines de : $X^2 - 18X + 65 = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = 18^2 - 4 \times 65 = 64 = 8^2$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines :

$$X_1 = \frac{18+8}{2} = 13 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{18-8}{2} = 5$$

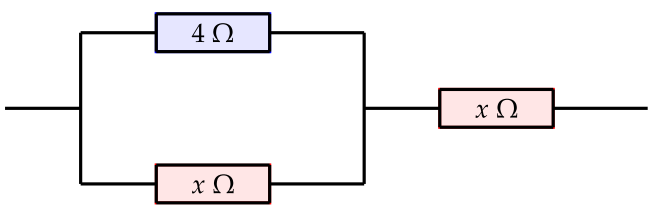
Les solutions du système sont donc : $S = \{(13, 5) ; (5, 13)\}$

⚠ On pourrait retrouver ce résultat graphiquement par l'intersection de la droite $y = 18 - x$ et de l'hyperbole $y = \dfrac{65}{x}$

8 Quelques problèmes du second degré

8.1 Problème de résistance équivalente

Dans un circuit électrique, des résistances ont été montées comme l'indique la figure ci-dessous. Déterminer la valeur de la résistance x pour que la résistance équivalente de l'ensemble soit de 6 Ω.



On rappelle que la résistance équivalente dans un circuit

- en série est la somme des résistances : $R_{eq} = R_1 + R_2$
- en parallèle est telle que : $\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

Le circuit est composé de deux parties, une partie en parallèle et l'autre en série.

Dans la partie en parallèle : $\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{x+4}{4x}$

en prenant l'inverse : $R_{eq} = \dfrac{4x}{x+4}$

La résistance équivalente de l'ensemble est donc : $\dfrac{4x}{x+4} + x = 6$

en multipliant par $(x+4)$, on a :

$$4x + x(x+4) = 6(x+4) \quad \Leftrightarrow \quad 4x + x^2 + 4x = 6x + 24 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 24 = 0$$

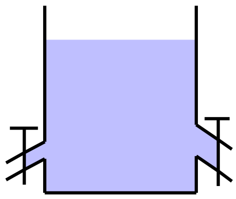
On calcule le discriminant : $\Delta = 4 + 4 \times 24 = 100 = 10^2$

On obtient deux solutions : $x_1 = \dfrac{-2+10}{2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \dfrac{-2-10}{2} = -6$

On ne retient que la solution positive. La valeur de la résistance est donc de 4 Ω

8.2 Un problème de robinet

Un robinet B met 40 min de plus qu'un robinet A pour vider un réservoir. Lorsqu'on ouvre simultanément les deux robinets le réservoir est vidé en 48 min. Quel temps faut-il à chacun pour vider le réservoir ?



La notion physique est le débit de vidange d'un réservoir.

Le débit d représente le volume écoulé par unité de temps : $d = \dfrac{V}{t}$

On suppose que la vidange du réservoir se fait à débit constant. De plus le débit avec les deux robinets ouverts est égal à la somme des débits des robinets A et B.

On pose :
t_{A} : temps de vidange en minutes avec le robinet A
t_{B} : temps de vidange en minutes avec le robinet B
t_T : temps de vidange en minutes avec les robinets A et B.
V : volume du réservoir

On a donc : $\dfrac{V}{t_T} = \dfrac{V}{t_{\text{A}}} + \dfrac{V}{t_{\text{B}}} \quad (1)$

Comme le robinet B a un temps de vidange de 40 min supérieur à celui de A :

On a : $t_B = t_A + 40 \quad (2)$

En remplaçant l'égalité (2) dans l'égalité (1), on a : $\dfrac{V}{48} = \dfrac{V}{t_{\text{A}}} + \dfrac{V}{t_{\text{A}} + 40}$

En divisant par V et en multipliant par $48\, t_{\text{A}}(t_{\text{A}} + 40)$, on a :

$$t_{\text{A}}(t_{\text{A}} + 40) = 48(t_{\text{A}} + 40) + 48t_{\text{A}} \quad \Leftrightarrow \quad t_{\text{A}}^2 + 40t_{\text{A}} = 48t_{\text{A}} + 1920 + 48t_{\text{A}}$$

On obtient alors l'équation : $t_{\text{A}}^2 - 56t_{\text{A}} - 1920 = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = 56^2 + 4 \times 1920 = 10\,816 = 104^2$

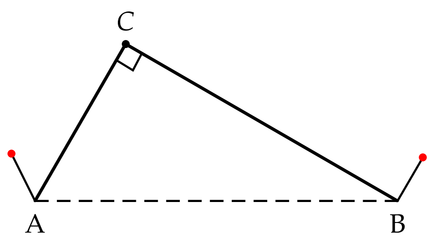
On prend la racine positive de l'équation :

$$t_A = \frac{56 + 104}{2} = 80 \quad \text{donc} \quad t_B = 80 + 40 = 120$$

Conclusion : le temps de vidange du robinet A est de 80 min soit 1h20 et celui du robinet B est de 120 min soit 2h.

8.3 Une histoire de ficelle

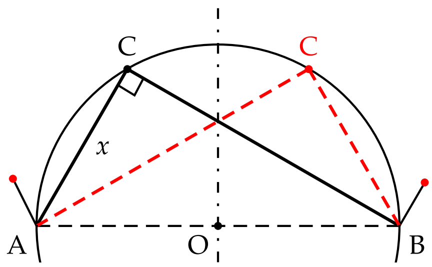
Une ficelle longue de 89 cm est fixée à ses extrémités par deux clous A et B distants de 65 cm.



a) Est-il possible de tendre la ficelle de manière à ce que le triangle ABC soit rectangle en C ?
b) Quelle doit être la longueur maximale de la ficelle pour que le problème soit possible ?

a) Pour que le triangle ABC soit rectangle en C, il faut que le point C soit sur le cercle de diamètre [AB].

Du fait de la symétrie du problème, si le point C existe, il en existe un deuxième C′ symétrique du premier par rapport à l'axe passant par le milieu de [AB] et perpendiculaire à (AB).



On pose $x = AC$, comme la longueur de ficelle est de 89 cm, on a alors $BC = 89 - x$

Comme $AB = 65$, d'après le théorème de Pythagore, on a :

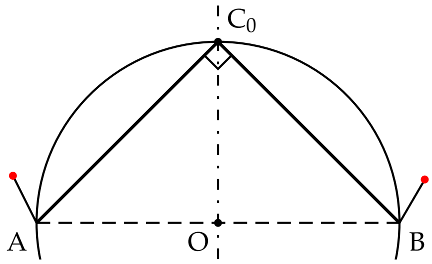
$$\begin{aligned}
x^2 + (89 - x)^2 &= 65^2 \\
x^2 + 89^2 - 89 \times 2x + x^2 &= 65^2 \\
2x^2 - 89 \times 2x + 89^2 - 65^2 &= 0 \\
2x^2 - 89 \times 2x + (89 - 65)(89 + 65) &= 0 \\
2x^2 - 89 \times 2x + 24 \times 154 &= 0 \\
x^2 - 89x + 12 \times 154 &= 0 \\
x^2 - 89x + 1848 &= 0
\end{aligned}$$

On calcule le discriminant $\Delta = 89^2 - 4 \times 1848 = 529 = 23^2$

On obtient les deux solutions correspondant aux point C et C′ :

$$x_1 = \frac{89+23}{2} = 56 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{89-23}{2} = 33$$

b) La situation limite correspond à la configuration où les points C et C′ sont confondus.
On appelle ℓ la longueur maximale de la ficelle.



Le triangle ACB est alors un triangle rectangle isocèle.

On a alors $AB^2 = 2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{2}$

On en déduit alors $\ell = 65\sqrt{2}$

Vérifions ce résultat par le théorème de Pythagore.

$$x^2 + (\ell - x)^2 = 65^2$$
$$x^2 + \ell^2 + 2\ell x + x^2 - 65^2 = 0$$
$$2x^2 + 2\ell x + \ell^2 - 65^2 = 0$$

On calcule le discriminant :

$\Delta = 4\ell^2 - 8(\ell^2 - 65^2) = 4\ell^2 - 8\ell^2 + 8 \times 65^2 = -4\ell^2 + 8 \times 65^2 = 4(-\ell^2 + 2 \times 65^2)$

Pour que ce système admette des solutions, on doit avoir $\Delta \geqslant 0$, on a alors :

$-\ell^2 + 2 \times 65^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 - 2 \times 65^2 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\ell - 65\sqrt{2})(\ell + 65\sqrt{2}) \leqslant 0$

Les racines sont donc $\ell_1 = 65\sqrt{2}$ et $\ell_2 = -65\sqrt{2}$

Comme le coefficient devant ℓ^2 est positif, on en déduit que les valeurs possibles sont à l'intérieur des racines. Comme $\ell > 65$, on en déduit que le problème admet une solution si :

$$65 < \ell \leqslant 65\sqrt{2}$$

La valeur limite de ℓ est donc $65\sqrt{2} \simeq 91,92$