§ 7 Produit Scalaire

Livre p 71-116

A - COMPLEMENTS SUR LES VECTEURS

Dans tout le chapitre le repère (O, I, J) sera orthonormé.

1 Norme d'un vecteur

Définition 1

Soit deux représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ d'un même vecteur $\vec{u}$. Les segments [AB] et [A'B'] ont la même longueur qui est appelée **norme** du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$.

Propriétés 1

- La norme $\|\vec{u}\|$ est un réel positif ou nul et on a $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.
- Soit $\vec{u}$ de coordonnées $(x\,;y)$ **dans un repère orthonormé**, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $\|k\vec{u}\| = |k|\ \|\vec{u}\|$.
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Définition 2

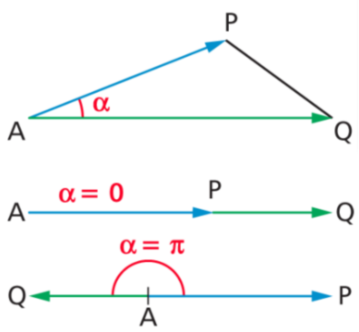
Un vecteur est dit unitaire si sa norme est égale à un.

Remarque : Si $\vec{u}$ est non nul, $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est un vecteur unitaire colinéaire à $\vec{u}$.

2 Angle géométrique de deux vecteurs

Définition 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et A, P et Q trois points tels que $\overrightarrow{AP} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AQ} = \vec{v}$. **L'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$**, noté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, est l'angle $\widehat{PAQ} = \alpha$ du triangle PAQ (éventuellement aplati).



Remarque : Celui-ci est indépendant des représentants choisis.

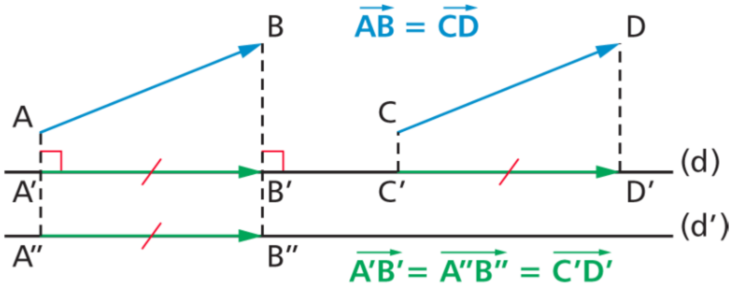
Définition 4

Si les droites (AP) et (AQ) sont **perpendiculaires**, on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** ; ils forment un angle droit, de mesure en radian $\dfrac{\pi}{2}$.

3 Projection orthogonale d'un vecteur

Définition 5

Soit $\vec{u}$, un vecteur non nul, (d), une droite de direction $\vec{u}$. Soit un vecteur $\vec{v}$, dont $\overrightarrow{AB}$ est un représentant, A′ et B′, les projections orthogonales de A et B sur (d).
La **projection orthogonale** du vecteur $\vec{v}$ sur (d) est le vecteur dont un représentant est le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$.



Remarque : $\overrightarrow{A'B'}$ est indépendant du représentant choisi, et également indépendant de (d).

EXERCICE 1

Déterminer la norme d'un vecteur

Énoncé

Soit un repère orthonormé (O, I, J). Soit les points A(4 ; −5), B(−5 ; −2).
Déterminer la norme du vecteur $\vec{u}$ dont $\overrightarrow{AB}$ est un représentant.

Méthode

On détermine si nécessaire les coordonnées du vecteur, puis on applique la formule $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

EXERCICE 2

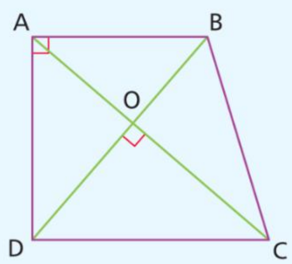
Projeter orthogonalement un vecteur

Énoncé

ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC] qui est rectangle en A et dont les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires et se coupent en O.

a. Déterminer un représentant des projections orthogonales de : $\overrightarrow{AD}$ sur (AC), $\overrightarrow{BC}$ sur (BD), $\overrightarrow{CB}$ sur (AC), $\overrightarrow{BC}$ sur (AD), $\overrightarrow{BD}$ sur (AC).

b. Déterminer l'ensemble des points M tels que la projection orthogonale de $\overrightarrow{OM}$ sur (BD) est $\overrightarrow{OD}$.



EXERCICE 3

Manipuler des angles géométriques de deux vecteurs

Énoncé

Soit un carré ABCD et le triangle équilatéral BEC, construit extérieurement au carré ABCD.
Donner une valeur en degré et en radian des angles géométriques des vecteurs :
a. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$; **b.** $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$; **c.** $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{EB}$.

Méthode

On détermine deux représentants de même origine A et on considère l'angle de sommet A dans le triangle (éventuellement aplati) formé par les deux vecteurs.

B - EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1 Définition du produit scalaire de deux vecteurs

Définition 6

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est le nombre réel défini par :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls ;
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

Remarques : • On appelle carré scalaire de $\vec{u}$ le nombre $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

• Par définition, le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, noté $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$, est le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés respectivement par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

• Dans le cas de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non nuls on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\widehat{BAC}$ et pour tout vecteur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$.

Propriétés 2

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

① $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

② $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ si et seulement si ($\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux).

③ Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est **aigu** si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est **obtus** si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$.

Remarque : $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$.

2 Autres expressions du produit scalaire

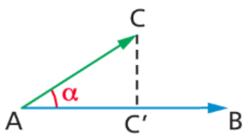
Propriétés 3

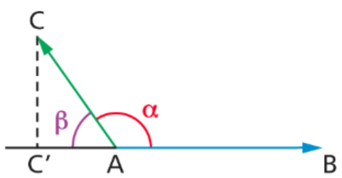
① **Projection orthogonale :** si $\vec{u}$ est non nul, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}_1$, où $\vec{v}_1$ est la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur une droite de direction $\vec{u}$.

② **Carrés scalaires :** pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2}{2}$.

③ **Expression analytique :** Dans un repère orthonormé, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y'), alors : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration : ① Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ un représentant de $\vec{v}$; la droite sur laquelle on projette est (AB) et on désigne par C′ la projection orthogonale de C. Les cas $\vec{v} = 0$ ou $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ conduisent à : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}_1 = 0$. Dans les autres cas, on dispose du triangle ABC, éventuellement aplati, et il y a deux cas à considérer.





$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\alpha = AB \times AC'$
$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$ car $\widehat{C'AB}$ est l'angle nul.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\alpha = -AB\cdot AC \cos\beta = -AB \times AC'$
$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$ car $\widehat{C'AB}$ est l'angle plat.

② On se place dans le cas $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On dispose du triangle ABC éventuellement aplati ; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\widehat{BAC}$. Par la formule d'Al-Kashi, vue en activité : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \dfrac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2}{2}$

car $BC^2 = CB^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2$.

③ Résulte du calcul dans ce repère des carrés scalaires précédents.

EXERCICE 4

Calculer un produit scalaire

Énoncé

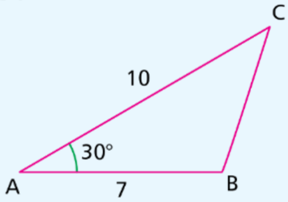
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans les trois cas suivants :

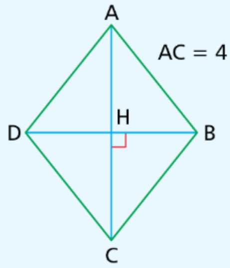
a. Soit trois points A, B, C tels que AB = 7, AC = 10 et $\widehat{BAC} = 30°$.

b. Soit ABCD un losange dont la diagonale AC a pour longueur 4.

c. Soit un triangle ABC tel que AB = 4, BC = 5 et AC = 6.

d. Soit dans un repère orthonormé les points A(2 ; 5), B(–3 ;1) et C(4 ; –2).





Méthode

On utilise :

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}|| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ (définition 6).

b. la projection orthogonale (propriétés 3 ①) ;

c. les carrés scalaires (propriétés 3 ②) ;

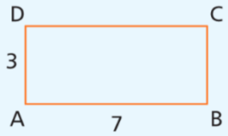
d. l'expression analytique (propriétés 3 ③).

EXERCICE 5

Choisir la méthode la plus adaptée pour calculer un produit scalaire

Énoncé

Soit ABCD, un rectangle tel que AB = 7 et AD = 3.
Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.



Commentaires

Si le calcul des longueurs $AC = BD = \sqrt{58}$ est simple, celui de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne l'est pas.
Aucune projection orthogonale d'un des vecteurs sur la droite formée pas l'autre n'est simple.
Il ne reste que deux méthodes :

- l'utilisation de la formule des carrés scalaires ;
- le calcul à partir de l'expression analytique.

C - PROPRIETES ET APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1 Calculer avec le produit scalaire

Propriétés 4

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et quel que soit le réel k :

① $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$.   ② $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

DÉMONSTRATION : Ces propriétés résultent de l'expression analytique du produit scalaire.

Propriétés 5

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

① $(\vec{u} + \vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $(\vec{u} - \vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$.

② $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$.

③ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) = \dfrac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2)$.

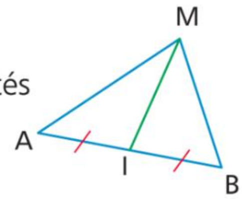
④ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{4}(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2)$.

2 Théorème de la médiane

Propriété 6

Si MAB est un triangle et I le milieu de [AB], alors $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

Démonstration : $MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$.
Comme I est milieu de [AB], $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et par utilisation des propriétés de calcul du produit scalaire : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2IB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.



3 Vecteurs orthogonaux, vecteur normal à une droite

Propriété 7

Dans un repère orthonormé, les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') sont **orthogonaux** si et seulement si : $\boldsymbol{xx' + yy' = 0}$.

Définition 7

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul. On dit que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$ s'il est orthogonal à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Propriétés 8

Une équation de $\mathscr{D}$ est	Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est	Un vecteur normal à $\mathscr{D}$ est	Toute perpendiculaire à $\mathscr{D}$ a une équation de la forme
$y = \text{cte}$	$(1\ ;\ 0)$	$(0\ ;\ 1)$	$x = \text{cte}$
$x = \text{cte}$	$(0\ ;\ 1)$	$(1\ ;\ 0)$	$y = \text{cte}$
$y = mx + p$ avec $m \neq 0$	$(1\ ;\ m)$	$\left(1 ; -\dfrac{1}{m}\right)$	$y = -\dfrac{1}{m}x + k$
$ax + by + c = 0$ avec a et b non simultanément nuls	$(-b\ ;\ a)$ ou $(b\ ;\ -a)$	$(a\ ;\ b)$	$bx - ay + k = 0$

→ $\mathscr{D} \perp \mathscr{D}' \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.

Remarque : Si deux droites sont perpendiculaires et qu'aucune n'est parallèle à un axe, alors le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

EXERCICE 6

Calculer avec le produit scalaire

Énoncé

a. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$.
Calculer $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v})$.
b. ABCD est un parallélogramme tel que AB = 6 et AD = 4. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.

EXERCICE 7

Déterminer des équations de droites perpendiculaires

Énoncé

Écrire une équation de la droite Δ passant par A(−4 ; 6) et perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $3x - y + 2 = 0$.

Méthode

On commence par déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.

1re méthode

On écrit que $\vec{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AM}$ (M un point quelconque de Δ), donc que $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} = 0$ et on traduit cette condition d'orthogonalité (propriété 7).

2e méthode

On détermine un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$, donc directeur de Δ. L'équation d'une droite passant par A et de direction $\vec{n}$, est obtenue en écrivant que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires (propriété 1 du chapitre 7).

Remarque : il est équivalent de dire que deux droites sont perpendiculaires, ou que leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux, ou que leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.

EXERCICE 8

Calculer des angles et des longueurs dans un triangle

Énoncé

Soit le triangle ABC de coordonnées des sommets : A(4 ; 11), B(3 ; −2), C(−5 ; 9). Donner une approximation, à l'unité, d'une mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

Méthode

On forme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
On calcule leurs longueurs respectives et on obtient le cosinus de $\widehat{BAC}$ en utilisant la formule donnant le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (définition 6, remarques).

Remarque : Ceci permet de calculer des angles et des longueurs dans le triangle ABC.

4 Le cercle

Propriété 9

Une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon R est $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, qu'on peut encore écrire $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = c$ où $c = R^2 - a^2 - b^2$.

Démonstration : $M(x ; y) \in \mathscr{C}$ est équivalent à $\Omega M = R$, et donc également à $M^2 = R^2$ ce qui s'écrit $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ ou encore $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = R^2 - a^2 - b^2$.

Propriété 10

M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si à $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration : Au collège, on démontre que M appartient au cercle de diamètre [AB] privé des points A et B si et seulement si les droites (MA) et (MB) sont perpendiculaires. La propriété 10 en découle immédiatement.

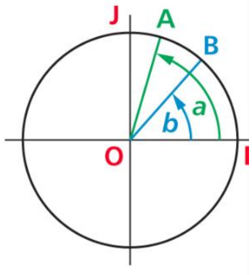
5 Formules de trigonométrie

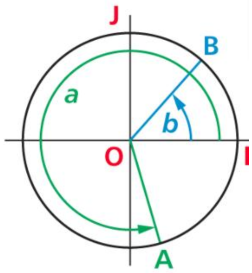
Propriété 11

Soit a et b deux réels et A et B les points du cercle trigonométrique tels que $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b$. Alors dans le triangle AOB, éventuellement aplati, $\cos(\widehat{AOB}) = \cos(a - b)$.

On pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

Démonstration : Pour tout entier relatif k, pour tout réel t, le changement de t en $t + 2k\pi$ ne modifie pas les positions de A et B et $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$. On suppose donc a et b appartenant à $[0, 2\pi[$.
En utilisant que, dans le triangle AOB, les angles géométriques $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOA}$ sont les mêmes et que $\cos t = \cos(-t)$, nous pouvons remplacer a par b et b par a et ainsi supposer $0 \leqslant b \leqslant a < 2\pi$.
L'arc $\overset{\frown}{BA}$ du cercle $\mathscr{C}$ ne contenant pas le point I (sauf en l'extrémité éventuelle B) a pour longueur la différence entre la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IA}$ et celle de l'arc $\overset{\frown}{IB}$.
Les choix faits pour a et b et la définition des mesures en radian des angles orientés $(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB})$ montrent que cette longueur est $a - b$.
Ainsi l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ dans le triangle AOB est soit $a - b$ (cas de la figure 1), soit $2\pi - (a - b)$ (cas de la figure 2), d'où $\cos(\widehat{AOB}) = \cos(a - b)$.





Propriétés 12

Pour tout a et b réels.

① $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
② $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
③ $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
④ $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

Démonstration

Soit a et b deux réels et A et B les points du cercle trigonométrique tels que $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b$.
Pour tout réel t et pout tout entier relatif k, $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$ et $\sin(t + 2k\pi) = \sin t$.
On peut donc supposer que $0 \leqslant a < 2\pi$ et $0 \leqslant b < 2\pi$.
• Si $0 \leqslant b \leqslant a < 2\pi$:
d'une part $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (\cos a\vec{i} + \sin a\vec{j})(\cos b\vec{i} + \sin b\vec{j}) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
d'autre part, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \, \|\overrightarrow{OB}\| \cos(\widehat{AOB}) = 1 \times 1 \times \cos(\widehat{AOB}) = \cos(a - b)$.
On obtient $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
• Si $0 \leqslant a \leqslant b < 2\pi$:
$\cos(a - b) = \cos(b - a) = \cos b \cos a + \sin b \sin a = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
(la seconde égalité résultant du cas précédent).
Dans les deux cas, on obtient la relation désirée.

Démonstration : En utilisant les propriétés du sinus et du cosinus liées aux angles associées t et $-t$ ainsi que celles liée aux angles associés t et $\dfrac{\pi}{2} - t$, on déduit les formules ②, ③, ④ de la ①.

EXERCICE 9

Reconnaître l'équation d'un cercle

Énoncé

Quel est l'ensemble des points $(x ; y)$ vérifiant

a. $x^2 + y^2 - 4x + 5y - 10 = 0$?

b. $x^2 + y^2 - 5x + 6y = -40$?

Méthode

On met l'équation sous la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = \mathrm{K}$.

- si $\mathrm{K} > 0$, l'équation est celle d'un cercle de rayon $\sqrt{K}$ et de centre $\Omega(a ; b)$;
- si $\mathrm{K} = 0$, l'ensemble cherché se réduit au point Ω ;
- si $\mathrm{K} < 0$, l'équation n'est pas celle d'un cercle et l'ensemble cherché est vide.

EXERCICE 10

Déterminer une équation de cercle défini par son centre et son rayon

Déterminer une équation de cercle défini par son diamètre

Donner une équation du cercle de centre (3 ; 4) et de rayon 2.

Donner une équation du cercle de diamètre [AB] où A(–3 ; 2) et B(–6 ; 7).