Le produit scalaire

Table des matières

1 Définition et propriétés

Les trois définitions suivantes sont équivalentes. On pourrait choisir comme point de départ chacune d'elle.

1.1 Définition par la norme

Définition 1 : On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

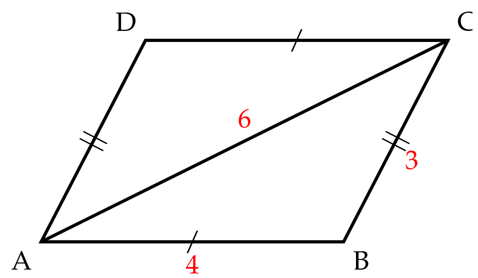
Remarque : Cette définition mesure le défaut d'orthogonalité de deux vecteurs. En effet si le triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 - AB^2 - AC^2 = 0$

Par convention, on écrira : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$. On a alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$

Exemple : Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ pour la figure suivante :

ABCD est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ d'où :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \left(||\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}||^2 - ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{AD}||^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AD}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2) \\
&= \frac{1}{2}(36 - 16 - 9) = \frac{11}{2}
\end{aligned}$$



1.2 Définition analytique

Définition 2 : Dans un **repère orthonormé** $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ est égal à :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

On peut aussi utiliser la notation matricielle : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$

Démonstration : Montrons que cette définition est équivalente à la définition par la norme.

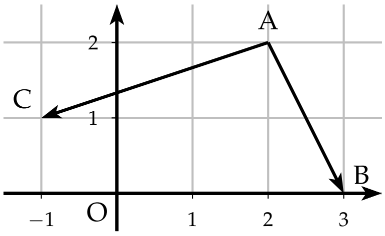
On rappelle que si un vecteur $\vec{u}(x\ ;\ y)$ alors : $||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2$

Calculons $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en revenant à la définition par la norme :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[(x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2+y^2) - (x'^2+y'^2)\right]\\
&= \frac{1}{2}(x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2-x^2-y^2-x'^2-y'^2)\\
&= \frac{1}{2}(2xx'+2yy')\\
&= xx'+yy'
\end{aligned}$$

Exemple : On donne la figure suivante, déterminer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1-2 \\ 1-2 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}\\
&= 1 \times (-3) + (-2) \times (-1)\\
&= -1
\end{aligned}$$



1.3 Définition projective

Définition 3 : Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

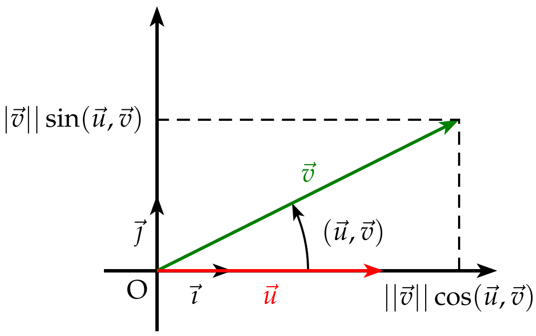
Démonstration : Montrons que cette définition est équivalente à la définition dans un repère orthonormé.

Prenons un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dont le premier vecteur $\vec{\imath}$ soit colinéaire et de même sens que le vecteur $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(x'\ ;\ y')$, avec :

$$\begin{cases} x = ||\vec{u}|| \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = ||\vec{v}||\cos(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) \\ y' = ||\vec{v}||\sin(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) \end{cases}$$

On a donc :

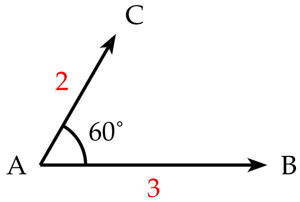
$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= xx' + yy'\\
&= ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})
\end{aligned}$$



Cette définition revient à projeter le vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$.

Exemple : On donne la figure suivante, déterminer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AB}|| \times \cos 60^\circ \\ &= AB \times AC \cos 60^\circ \\ &= 3 \times 2 \times \frac{1}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$



1.4 Propriétés

Propriété 1 : Le produit scalaire de deux vecteurs est :

- commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- bilinéaire, c'est à dire que pour tous réels a et b :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \qquad \text{et} \qquad (a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Propriété 2 : Le produit scalaire de deux vecteurs permet de montrer les propriétés suivantes pour tous vecteurs non nuls :

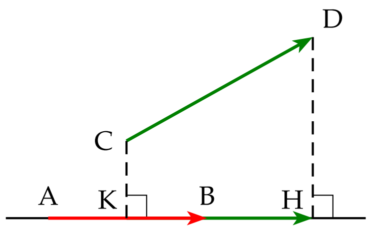
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens contraires
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux

1.5 Projection orthogonale

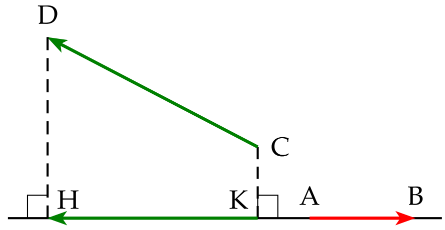
Théorème 1 : Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. On appelle K et H les projections orthogonales respectives de C et D sur la droite (AB), on a alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= AB \times KH \qquad \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{KH} \text{ sont de même sens.} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= -AB \times KH \qquad \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{KH} \text{ sont de sens contraires.}\end{aligned}$$

On a pour les deux cas les figures suivantes :



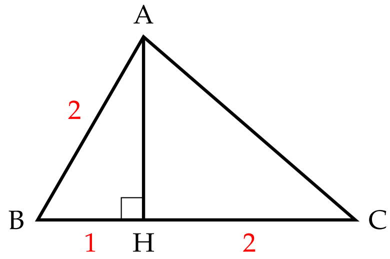
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KH}$ de même sens



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KH}$ de sens contraire

Exemple : En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, calculer les produits scalaires suivants :

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$$



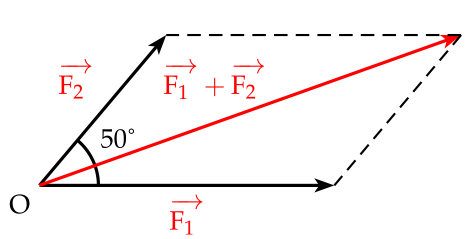
$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{AB} &= AB^2+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= AB^2+AH^2 \quad \text{on projette B} \perp \text{à (AH)}\\ &= AB^2+(AB^2-BH^2) \quad \text{par le th de Pythagore}\\ &= 2AB^2-BH^2\\ &= 2\times 4-1=7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)\cdot\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= AH^2+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HB} \quad \text{on projette B} \perp \text{à (AH)}\\ &= (AB^2-BH^2)-HC\times HB \quad \text{par le th de Pythagore}\\ &= 4-1-2\times 1=1\end{aligned}$$

1.6 Application à la physique

On peut utiliser le produit scalaire pour calculer la résultante de deux forces.

Soit un point O soumis à deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ qui forme un angle de 50°. Les intensités des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont respectivement 300 N et 200 N. On a alors la figure ci-contre :



D'après la première définition, on a : $\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_2}=\dfrac{1}{2}\left(||\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}||^2-F_1^2-F_2^2\right)$

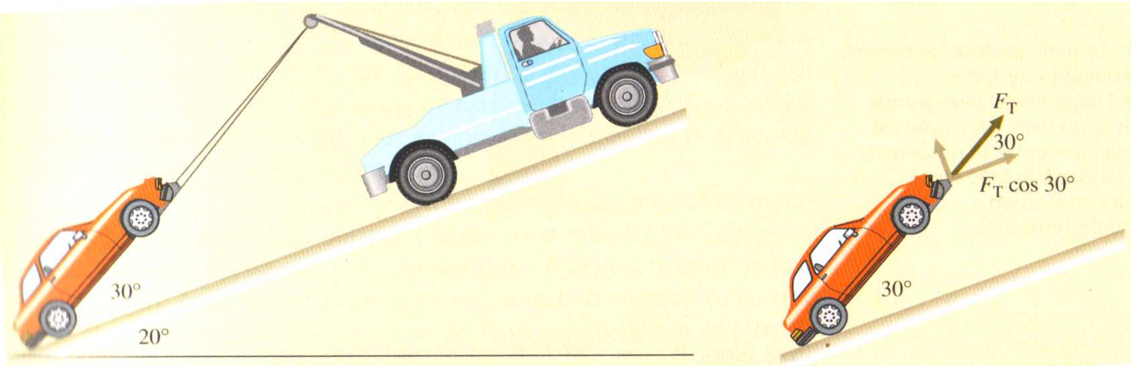
D'après la troisième définition, on a : $\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_2}=F_1\times F_2\cos 50°$

On obtient alors en égalisant les deux formes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}||^2-F_1^2-F_2^2\right) &= F_1\times F_2\cos 50°\\ ||\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}||^2 &= 2F_1\times F_2\cos 50°+F_1^2+F_2^2\\ ||\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}|| &= \sqrt{2F_1\times F_2\cos 50°+F_1^2+F_2^2}\\ &= \sqrt{2\times 300\times 200\cos 50°+300^2+200^2}\\ &\simeq 455,12\text{ N}\end{aligned}$$

On retrouve aussi le produit scalaire en physique pour le travail d'une force. En effet le travail W d'une force $\overrightarrow{F}$ est égale au produit scalaire du vecteur force $\overrightarrow{F}$ par le vecteur déplacement $\overrightarrow{\ell}$.

$$W=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\ell}$$



Une dépanneuse remorque une voiture en panne sur une côte de 20 degré. La tension du câble est constante et les deux véhicules ont une accélération constante. En supposant que le câble fait un angle de 30 degré avec le plan de la route et que la tension est de 1600 N, quel est le travail effectué par la dépanneuse sur la voiture si elle la remorque sur une distance de 500 m sur cette route en pente. L'angle de la route n'a pas d'importance ici. On a alors :

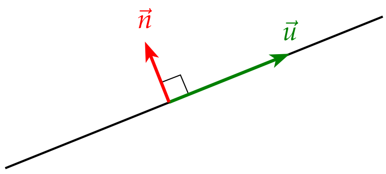
$$\begin{aligned} W &= \overrightarrow{F_T} \cdot \overrightarrow{\ell} = F_T \times \cos 30 \times 500 = 1600 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 500 \\ &= 400\,000\sqrt{3}\ \text{J} \simeq 692,82\ \text{kJ} \end{aligned}$$

2 Droite et cercle

2.1 Vecteur normal à une droite

Définition 4 : Un vecteur normal $\vec{n}$ à une droite d est un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d. On a alors : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

Remarque : Si un vecteur $\vec{n}$ est normal à un vecteur directeur d'une droite d, il est normal à tout vecteur directeur de d



Théorème 2 : Dans un repère **orthonormé** :

- Si une droite a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, alors $\vec{n}(a\ ;\ b)$ est un vecteur normal à la droite d.
- Réciproquement si un vecteur non nul $\vec{n}(a\ ;\ b)$ est un vecteur normal à une droite d, alors une équation cartésienne de la droite d est de la forme : $ax + by + c = 0$

Démonstration : On vérifie aisément que : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -ab + ab = 0$

Donc $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{u}$

Exemple : On donne la droite $d\ :\ 3x - y + 5 = 0$.

Déterminer une équation de la droite Δ qui passe par $A(1\ ;\ 2)$ et qui est perpendiculaire à d. On proposera deux solutions.

- Si Δ est perpendiculaire à d, un vecteur normal $\vec{n}(3\ ;-1)$ à d est un vecteur directeur de la droite Δ. On a alors : $\Delta\ :\ -x - 3y + c = 0$

  Comme $A \in \Delta$, ses coordonnées vérifient l'équation de Δ donc :
  $-1 - 6 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 7$

  Une équation cartésienne de la droite Δ est : $-x - 3y + 7 = 0$
- Soit $M(x\ ;\ y)$ un point quelconque de la droite Δ et $\vec{u}(1\ ;\ 3)$ un vecteur directeur de la droite d. On a alors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (x-1) + 3(y-2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x + 3y - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x - 3y + 7 = 0$$

2.2 Équation d'un cercle

Théorème 3 : L'équation d'un cercle, $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(a\ ;\ b)$ et de rayon r, dans un repère **orthonormé**, est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Démonstration : Soit $M(x\ ;\ y)$ un point quelconque du cercle de centre Ω et de rayon r donc :

$$\Omega M^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Théorème 4 : Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre AB est l'ensemble de points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Démonstration : Soit I le milieu du segment [AB]. On introduit le point I dans la relation.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\right) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$$

Comme $I = m[AB]$ alors $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\dfrac{AB^2}{4}$, on a :

$$MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad MI^2 = \frac{AB^2}{4}$$

M appartient donc à un cercle de centre I et de rayon $\dfrac{AB}{2}$ donc de diamètre AB

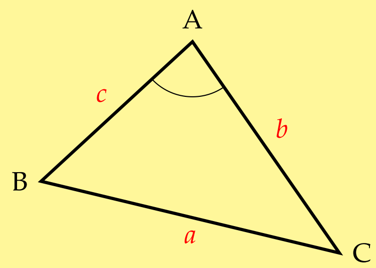
3 Relation métrique dans un triangle

3.1 Relation d'Al-Kashi

Cette relation a pour but de déterminer une relation entre les trois longueurs d'un triangle, il s'agit de la généralisation du théorème de Pythagore.

Théorème 5 : Soit un triangle ABC. On appelle a, b et c les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B et C. On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$



Remarque : On peut remplacer l'angle géométrique $\widehat{A}$ par l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})$ car le cosinus d'un angle négatif est égal au cosinus d'un angle positif.

Démonstration : On part de la relation :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}^{\,2} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2\\ &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2\\ &= \overrightarrow{AC}^{\,2} - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^{\,2}\\ &= AC^2 + AB^2 - 2AC\times AB\cos\widehat{A}\end{aligned}$$

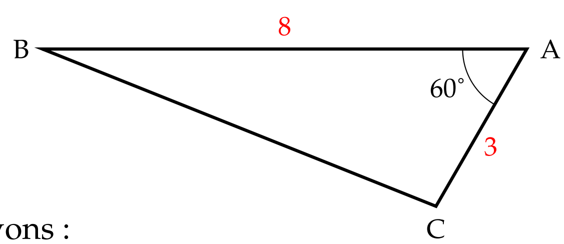
Ce qui devient en utilisant les notations de la figure : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

Remarque : On retrouve le théorème de Pythagore si l'on fait $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{2}$ le cosinus étant dans ce cas nul, donc $a^2 = b^2 + c^2$

Exemple : Déterminer la longueur BC et les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle ci-dessous.

Avec nos notations nous avons alors : $b = 3$, $c = 8$ et $\widehat{A} = 60°$.

Nous cherchons donc à déterminer a et les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.



- D'après la relation d'Al-Kashi, nous avons :
  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} = 3^2 + 8^2 - 2\times 3\times 8\times\dfrac{1}{2} = 9 + 64 - 24 = 49 \Leftrightarrow a = 7$
- Pour déterminer l'angle $\widehat{B}$, on effectue une **permutation circulaire** de la formule d'Al-Kashi, c'est à dire :

  $$a \to b \quad , \quad b \to c \quad , \quad c \to a \quad , \quad \widehat{A} \to \widehat{B}$$

  On obtient donc : $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\widehat{B} \Leftrightarrow 2ac\cos\widehat{B} = a^2 + c^2 - b^2$

$$\cos \widehat{\mathrm{B}} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{49+64-9}{2\times 7\times 8} = \frac{104}{112} = \frac{13}{14}$$

On obtient donc : $\widehat{\mathrm{B}} = \arccos\left(\frac{13}{14}\right) \simeq 21,7°$

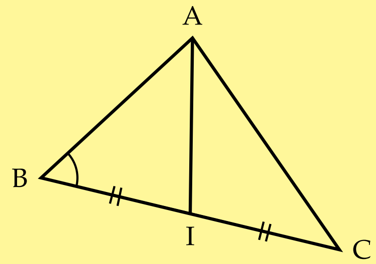
- enfin, par complément à 180° : $\widehat{\mathrm{C}} \simeq 180-60-21,79 \simeq 98,21°$

3.2 Théorème de la médiane

Ce théorème permet de connaître la longueur de la médiane à partir des trois longueurs du triangle

Théorème 6 : Dans un triangle quelconque ABC, on appelle I le milieu du segment [BC], on a alors :

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2 = 2\mathrm{AI}^2 + \frac{\mathrm{BC}^2}{2}$$



Démonstration :

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2 &= (\overrightarrow{\mathrm{AI}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}})^2 + (\overrightarrow{\mathrm{AI}}+\overrightarrow{\mathrm{IC}})^2\\ &= \mathrm{AI}^2 + 2\times\overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}} + \mathrm{IB}^2 + \mathrm{AI}^2 + 2\times\overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IC}} + \mathrm{IC}^2\\ &= 2\mathrm{AI}^2 + 2\times\overrightarrow{\mathrm{AI}}\,(\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\overrightarrow{\mathrm{IC}}) + \mathrm{IB}^2+\mathrm{IC}^2\end{aligned}$$

Comme I milieu de [BC], on a $\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\overrightarrow{\mathrm{IC}} = \vec{0}$ et $\mathrm{IB}=\mathrm{IC}=\frac{\mathrm{BC}}{2}$

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2 = 2\mathrm{AI}^2 + 2\left(\frac{\mathrm{BC}}{2}\right)^2 = 2\mathrm{AI}^2 + \frac{\mathrm{BC}^2}{2}$$

4 Trigonométrie

4.1 Formules d'addition

Théorème 7 : Soit a et b deux angles quelconques, on a les relations

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b\\ \sin(a-b) &= \sin a\cos b - \cos a\sin b\end{aligned}$$

Démonstration : Soit les points A et B sur le cercle unité :

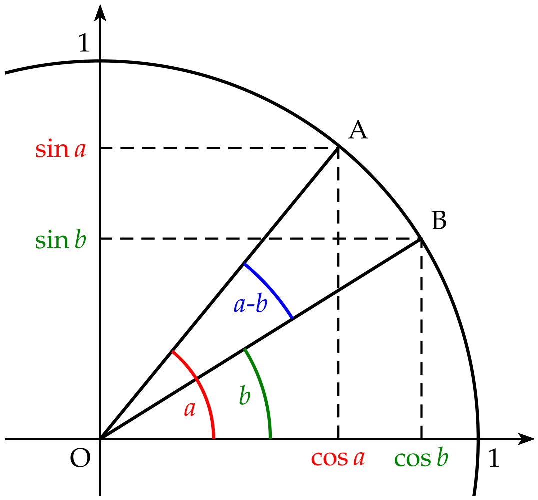
Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ de deux façons différentes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= OA \times OB \times \cos(a-b)\\ &= \cos(a-b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}\\ &= \cos a \cos b + \sin a \sin b\end{aligned}$$

On en déduit donc la deuxième formule :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$



Pour retrouver la première, il faut remplacer dans la formule ci-dessus b par $-b$, on obtient alors :

$$\cos[a-(-b)] = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$$

Comme la fonction cosinus est paire et la fonction sinus impaire, on a :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Pour retrouver les formules avec le sinus, on utilise la formule qui permet de passer du cosinus au sinus et inversement, c'est à dire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b\\ &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\end{aligned}$$

On retrouve la dernière formule en remplaçant b par $-b$ et compte tenu des parités des fonctions cos et sin, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\sin[a+(-b)] &= \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b)\\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b\end{aligned}$$

Exemple : En remarquant que : $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

En appliquant les formules d'addition, on a :

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Remarque : Pour se souvenir des formules d'addition, on peut remarquer :

- Avec le cosinus on "*ne panache pas*" tandis qu'avec le sinus on "*panache*".
- Avec le cosinus de $a+b$, on met un "*moins*" entre les deux termes, tandis qu'avec le sinus pas d'inversion de signe

4.2 Formules de duplication

Théorème 8 : Pour tout angle a, on a les relations :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

Démonstration : La formule sur le $\sin 2a$ est l'application directe des formules d'addition.
Les formules sur le $\cos 2a$ font intervenir la relation : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$= \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$$
$$= (1-\sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$

Exemples :

1) Calculer $\cos 2x$ dans les deux cas suivants :

   a) $\cos x = \dfrac{3}{5}$ b) $\sin x = -\dfrac{1}{3}$

2) a est un réel de $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\cos a = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

   a) Calculer $\cos 2a$.

   b) À quel intervalle appartient $2a$. Déduire alors a.

1) a) On ne connaît que le cosinus donc :

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = 2\times\frac{9}{25} - 1 = \frac{18-25}{25} = -\frac{7}{25}$$

   b) On ne connaît que le sinus donc :

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - 2\times\frac{1}{9} = \frac{9-2}{9} = \frac{7}{9}$$

2) a) On ne connaît que le cosinus donc :

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 - 1 = 2\times\frac{2+\sqrt{3}}{4} - 1 = \frac{4+2\sqrt{3}-4}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Comme $a \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ alors $2a \in [0;\pi]$, on en déduit : $2a = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{12}$

4.3 Formules de linéarisation

Théorème 9 : Pour tout angle a on a les relations :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

Démonstration : Ces formules se déduisent directement des formules de duplication avec le $\cos 2a$. En effet :

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \;\Leftrightarrow\; 2\cos^2 a = 1+\cos 2a \;\Leftrightarrow\; \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \;\Leftrightarrow\; 2\sin^2 a = 1-\cos 2a \;\Leftrightarrow\; \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

Exemple : Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

On a : $\cos^2\frac{\pi}{8} = \dfrac{1+\cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, on a : $\cos\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

De même : $\sin^2\frac{\pi}{8} = \dfrac{1-\cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

Comme $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, on a : $\sin\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$