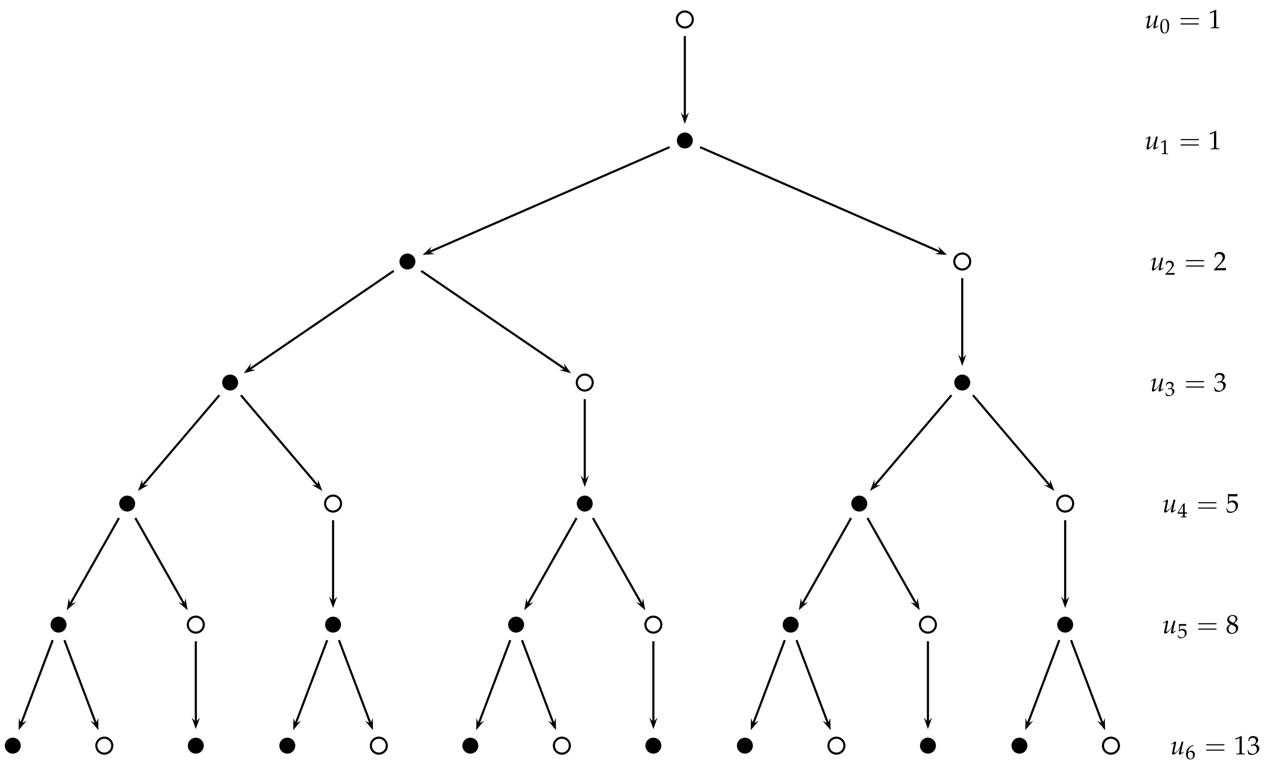
Correction : suite de Fibonacci

1 Historique

Pour l'arbre suivant permet de trouver le nombre de couples de lapin sur 6 mois. Le point rempli à gauche correspond au couple parents et celui de droite (évidé) au couple enfant qui ne peut engendrer qu'après deux mois.



2 Suite de Fibonacci (1175-1240)

On a : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = 1 \quad u_1 = 1$

On obtient : $u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 5,\ u_5 = 8$ et $u_6 = 13$

On constate que les premiers termes correspondent aux résultats trouvés avec un arbre.

Pour établir cette relation de récurrence :

- A l'étape n : u_n couples de lapins
- A l'étape $n+1$: u_{n+1} couples de lapins dont u_n parents et $(u_{n-1} - u_n)$ enfants
- A l'étape $n+2$: les u_n parents qui ont pu se reproduire ($2u_n$) et les $(u_{n-1} - u_n)$ enfants

$$u_{n+2} = 2u_n + (u_{n+1} - u_n) = u_n + u_{n+1}$$

On peut proposer l'algorithme suivant pour connaître la population de couples de lapins au bout d'un an, soit pour $n = 12$

On trouve alors les résultats suivants :

n	12	24	36
u_n	233	75 025	24 157 817

On trouve donc 233 couples de lapins au bout d'un an, et 75 025 et 24 157 817 respectivement au bout de 2 et 3 ans.

Variables : N, entier et U, V, W réels
Entrées et initialisation
- Lire N
- $1 \rightarrow U$
- $1 \rightarrow V$

Traitement
- **pour** I de 2 à N **faire**
  - $U + V \rightarrow W$
  - $V \rightarrow U$
  - $W \rightarrow V$
- **fin**

Sorties : Afficher V

3 Suites auxiliaires

Si la suite (a_n) est géométrique alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = q\, a_n$

On a alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= q\, a_n \\ \alpha u_{n+2} + u_{n+1} &= q(\alpha u_{n+1} + u_n) \\ \alpha(u_{n+1} + u_n) + u_{n+1} &= q\alpha u_{n+1} + q\, u_n \\ (\alpha + 1 - q\alpha)u_{n+1} + (\alpha - q)u_n &= 0 \end{aligned}$$

Pour que cette égalité soit vrai $\forall n \in \mathbb{N}$, il faut que :

$$\begin{cases} \alpha - q = 0 \\ \alpha + 1 - q\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \alpha \\ \alpha + 1 - \alpha^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \alpha \\ \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

On cherche les racines de la deuxième équation : $\Delta = 1 + 4 = 5$

On obtient deux solutions : $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Les suite (v_n) et $w_n)$ sont donc géométriqus de raisons respectives α_1 et α_2 et de premiers termes $v_0 = \alpha_1 + 1 = \alpha_1^2$ et $w_0 = \alpha_2 + 1 = \alpha_2^2$

On obtient alors : $v_n = v_0 q^n = \alpha_1^2 \times \alpha_1^n = \alpha_1^{n+2}$ et $w_n = w_0 q^n = \alpha_2^2 \times \alpha_2^n = \alpha_2^{n+2}$

4 Conclusion

Calculons d'abord : $\alpha_1 - \alpha_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

$$\frac{v_n - w_n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha_1 u_{n+1} + u_n - \alpha_2 u_{n+1} - u_n}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)u_{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\, u_{n+1}}{\sqrt{5}} = u_{n+1}$$

En mettant cette formule à l'ordre inférieur, on obtient :

$$u_n = \frac{v_{n-1} - w_{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

On peut tester cette formule à l'aide du programme suivant :

On trouve alors les résultats suivants :

n	2	6	12	24
u_n	2	13	233	75 025

On retrouve bien les résultats trouvés

Variables : N, entier et A, B, U réels
Entrées et initialisation
Lire N
$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow A$
$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \rightarrow B$
Traitement
$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(A^{N+1} - B^{N+1}\right) \rightarrow U$
Sorties : Afficher U