Livre p 71-116

A - NOMBRE DERIVE D'UNE FONCTION EN UN POINT

1 Introduction à la limite du taux d'accroissement

Définition 1

Soit f une fonction, $\mathcal{D}$ son ensemble de définition et a un point de $\mathcal{D}$. Pour h non nul et tel que $a + h$ appartient à $\mathcal{D}$, on définit le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ qui est appelé **taux d'accroissement** de f entre a et $a + h$.

Introduisons sur un exemple la notion de limite du taux d'accroissement.

Exemple : Considérons la fonction $f : x \mapsto (x + 2)^2$. Intéressons-nous au taux d'accroissement de la fonction f entre 0 et un réel x non nul, à savoir à la quantité $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{(x+2)^2-4}{x}$.

Ce taux d'accroissement n'est pas défini pour $x = 0$, mais on peut le calculer pour des valeurs de x très proches de 0.

On constate que, pour tout réel x différent de 0, on peut écrire :

$$\frac{(x+2)^2-4}{x} = \frac{(x+2)^2-2}{x} = \frac{(x+2-2)(x+2+2)}{x} = \frac{x(x+4)}{x} = x+4 .$$

Lorsque x se rapproche de 0, le taux d'accroissement étudié se rapproche donc du réel 4.

On dit que la **limite du taux d'accroissement de f lorsque x tend vers 0 vaut 4** et on note :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 4.$$

2 Définition du nombre dérivé

Propriété 1

Soit f une fonction, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et $a \in \mathcal{D}_f$.

S'il existe un réel ℓ tel que le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche de ℓ lorsque h est très proche de 0, alors :

- on dit que la fonction f est **dérivable** en a ;
- le réel ℓ est alors appelé **nombre dérivé** de f en a, noté $\mathbf{f'(a)}$;
- on peut écrire $\mathbf{f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$.

Exemples : • La fonction f proposée dans l'exemple ci-dessus est dérivable en 0 et on a $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 4$.

• Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. On trouve, pour tout h différent de 0 :

$$\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \frac{\dfrac{1}{-2+h} - \dfrac{1}{-2}}{h} = \frac{\dfrac{-2-(-2+h)}{(-2)(-2+h)}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{(-2)(-2+h)}}{h} = \frac{-1}{(-2)(-2+h)}.$$

Lorsque h se rapproche de 0, le taux d'accroissement de f en -2 se rapproche donc du réel $-\dfrac{1}{4}$.

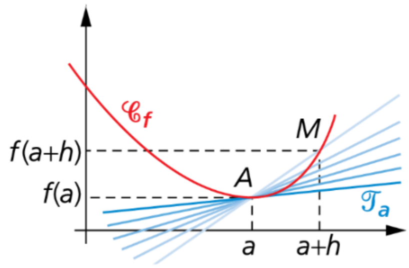
La fonction f est donc dérivable en -2 et $f'(-2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = -\dfrac{1}{4}$.

Remarque : Il se peut qu'une fonction ne soit pas dérivable en un point a donné. On pourra regarder, à titre d'exemple, l'activité 1 et le savoir-faire 1.

3 Interprétation géométrique et tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Considérons un réel a appartenant à I et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
Soit enfin un réel h tel que $a + h \in$ I et M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a + h$.
La droite (AM) est appelée **sécante** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A. Le coefficient directeur de cette droite n'est autre que le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le réel h se rapproche de 0, le point M se rapproche du point A.
Dire que f est **dérivable en a**, revient à dire que la droite (AM) se rapproche d'une **droite** « limite » **non-verticale** (notée $\mathscr{T}_a$ sur le schéma ci-contre). Cette droite est appelée **tangente** à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.



Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en un réel a appartenant à I, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
La droite passant par le point A(a ; $f(a)$) et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée **tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.**

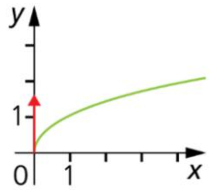
Propriété 2

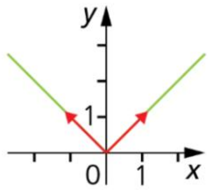
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation : $\boldsymbol{y = f'(a)\,(x - a) + f(a)}$.

DÉMONSTRATION : La tangente a pour coefficient directeur $f'(a)$, donc elle a une équation de la forme $y = f'(a)x + b$. Or, cette droite passe par le point $(a,f(a))$, donc $f(a) = f'(a)a + b$, d'où $b = f(a) - af'(a)$.

EXEMPLE : Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2 a pour équation $y = (x - (-2))\, f'(-2) + f(-2)$, c'est-à-dire : $y = -\dfrac{1}{4}(x + 2) - \dfrac{1}{2}$.

REMARQUE : Dire qu'une fonction n'est pas dérivable en un point a signifie qu'on se trouve dans l'un des deux cas de figure suivants : **pas de limite finie** (Ex. : tangente verticale de la racine carrée en 0) ou **limites différentes** (Ex. : deux demi-tangentes pour la valeur absolue en 0).





4 Dérivée d'une fonction

Définition 3

Soit f une fonction, $\mathscr{D}_f$ son l'ensemble de définition et I un sous-ensemble de $\mathscr{D}_f$.
On dit que f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout point de I.
La fonction f qui à chaque réel $x \in$ I associe le réel $f'(x)$ est alors appelée la **fonction dérivée** de f sur l'intervalle I. On note cette fonction f'.

EXEMPLE : • Soit $f : x \mapsto (x - 4)^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. On trouve, pour tout h non nul :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h-4)^2-(a-4)^2}{h} = \frac{(a+h-4-a+4)(a+h-4+a-4)}{h} = 2a - 8 + h.$$

Lorsque h tend vers 0, cette dernière quantité tend donc vers $2a - 8$. On en déduit que la fonction f est dérivable en a pour tout réel a et que $f'(a) = 2a - 8$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par : $f' : x \mapsto 2x - 8$.

B - REGLES DE DERIVATION

1 Dérivées usuelles

Attention : *tableau à connaître par cœur.*

Le tableau suivant donne la liste des dérivées des fonctions usuelles.

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
Fonction constante : $f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Fonction affine : $f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
Fonction carré : $f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Fonction puissance : $f(x) = x^n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Fonction racine : $f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$	$]0\,;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Note : *le domaine de dérivabilité est ici différent du domaine de définition.*

2 Dérivation et opérations sur les fonctions

Propriétés 3

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors :

- La fonction somme $u + v$ est dérivable sur I et on a : $(u + v)' = u' + v'$.
- La fonction λu est dérivable sur I et on a : $(\lambda u)' = \lambda \times u'$.
- La fonction produit $u \times v$ est dérivable sur I et on a : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$,

en particulier $(u^2)' = 2u'u$.

- Si la fonction v ne s'annule pas sur I, alors :

la fonction quotient $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$, en particulier $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Démonstration : Pour le produit $u \times v$.

- Soit a appartenant à I. Pour tout réel non nul h tel que $a + h \in$ I, posons :

$\Delta_a(h) = \frac{(u \times v)(a+h) - (u \times v)(a)}{h}$. On peut écrire :

$$\Delta_a(h) = \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$$

après avoir ajouté puis retranché la quantité $u(a)v(a + h)$.

On a donc : $\Delta_a(h) = \underbrace{\frac{u(a+h) - u(a)}{h}}_{①}\underbrace{v(a+h)}_{②} + u(a)\underbrace{\frac{v(a+h) - v(a)}{h}}_{③}$.

- Puisque u est dérivable en a, la fraction ① tend vers $u'(a)$ lorsque h tend vers 0.
- Puisque v est dérivable en a, la fraction ③ tend vers $v'(a)$.
- Puisque ③ est proche de $v'(a)$, on a $v(a + h) - v(a)$ proche de $hv'(a)$, donc $v(a + h)$ (②) tend vers $v(a)$ lorsque h tend vers 0.
- Finalement, le quotient $\Delta_a(h)$ tend vers $u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Exemple : La fonction $u : x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[1\,;2]$. La fonction $v : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc sur $[1\,;2]$. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable sur $[1\,;2]$ d'après les propriétés qui précèdent, et on a, pour tout $x \in [1\,;2]$:

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

C - APPLICATIONS DE LA DERIVATION

1 Lien entre signe de la dérivée et sens de variation

Propriété 4

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I.
- f est **croissante** sur I si et seulement si la fonction dérivée f' est **positive** sur I.
- f est **décroissante** sur I si et seulement si la fonction dérivée f' est **négative** sur I.
- f est **constante** sur I si et seulement si la fonction dérivée f' est **nulle** sur I.

DÉMONSTRATION : • Démontrons que si f est croissante, alors sa dérivée est positive.
La réciproque de ce résultat est beaucoup plus difficile à établir.
• Supposons que f est croissante sur I. Considérons un réel a appartenant à I et un réel h tel que $a + h$ appartienne à I. Si $h > 0$, alors, la croissance de f permet d'écrire $f(a) \leqslant f(a + h)$, d'où $f(a + h) - f(a) \geqslant 0$. En divisant par $h > 0$, on obtient : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \geqslant 0$. De même, si $h < 0$, alors la croissance de f permet d'écrire $f(a) \geqslant f(a + h)$, d'où $f(a + h) - f(a) \leqslant 0$.
En divisant par $h < 0$, on obtient : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \geqslant 0$. Nous admettrons alors que la limite de cette quantité lorsque h tend vers 0 est positive, c'est-à-dire, que $f'(a) \geqslant 0$.

EXEMPLE : Étudions les variations sur $]0\,;\,2]$ de la fonction $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$.
La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,2]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0\,;\,2]$.
Pour tout x appartenant à $]0\,;\,2]$: $f'(x) = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$.
On obtient le tableau de variations ci-contre.

x	0		$\frac{1}{3}$		2
$f'(x)$	‖	−	0	+	
f		↘		↗	

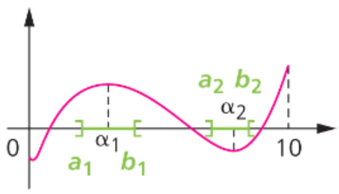
2 Extremum local d'une fonction

Définition 4

Note : on parle d'extremum local pour désigner un minimum ou un maximum local.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et α appartenant à I. On dit que :
- f admet sur I un **maximum local en α** s'il existe un intervalle ouvert $]a\,;\,b[$ inclus dans I et contenant α tel que : pour tout x appartenant à $]a\,;\,b[$, on a $f(x) \leqslant f(\alpha)$.
- f admet sur I un **minimum local en α** s'il existe un intervalle ouvert $]a\,;\,b[$ inclus dans I et contenant α tel que : pour tout x appartenant à $]a\,;\,b[$, on a $f(x) \geqslant f(\alpha)$.

EXEMPLE : La fonction f représentée ci-contre admet :
- un maximum local en α_1 car il existe un intervalle ouvert $]a_1\,;\,b_1[$ inclus dans $[0\,;\,10]$ tel que : $\forall\, x \in\,]a_1\,;\,b_1[$, $f(x) \leqslant f(\alpha_1)$.
- un minimum local en α_2 car il existe un intervalle ouvert $]a_2\,;\,b_2[$ inclus dans $[0\,;\,10]$ tel que : $\forall\, x \in\,]a_2\,;\,b_2[$, $f(x) \geqslant f(\alpha_2)$.



Propriété 5

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit α appartenant à I.
Si f admet en α un extremum local, alors $f'(\alpha) = 0$.

REMARQUES : • La réciproque de ce théorème est fausse, comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto x^3$. En effet, cette fonction a pour dérivée $x \mapsto 3x^2$ qui s'annule en 0, alors que la fonction f n'admet pas d'extremum en 0.
• En revanche, si f' s'annule et change de signe en $\alpha \in$ I, alors la fonction a un extremum en α.