

Fonctions de référence

Variation des fonctions associées

Table des matières

1	Fonction numérique	2
1.1	Définition	2
1.2	Ensemble de définition	2
1.3	Comparaison de fonctions	2
2	Variation d'une fonction	4
3	Résolution graphique	4
4	Fonctions de référence	6
4.1	Fonction affine	6
4.2	Fonction carrée	6
4.3	Fonction inverse	6
4.4	La fonction racine carrée	7
4.4.1	Étude de la fonction racine carrée	7
4.4.2	Comparaison des fonctions carrée, identité et racine carrée	8
4.5	La fonction valeur absolue	8
4.5.1	Définition	8
4.5.2	Variation	9
5	Sens de variation des fonctions associées	10
5.1	Somme de fonctions	10
5.2	Produit par une constante	11
5.3	Racine carrée et inverse d'une fonction	11
5.4	Exercices d'application	12
5.4.1	Encadrement d'une fonction	12
5.4.2	Tableau de variation et courbe d'une fonction	13
5.4.3	Variation d'une fonction homographique	14

1 Fonction numérique

1.1 Définition

Définition 1 : Une fonction numérique f d'une variable réelle x est une relation qui à un nombre réel x associe un unique nombre réel y noté $f(x)$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \text{ ou } D_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

⚠ Il faut faire la différence entre la fonction f qui représente une relation et $f(x)$ qui représente l'image de x par f qui est un nombre réel.

Remarque :

- On dit que $y = f(x)$ est **l'image** de x par f et
- x est un **antécédent** (non unique) de $y = f(x)$ par f

Exemples :

- $f(x) = 3x - 7$ f est une fonction affine
- $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ f est une fonction du second degré
- $f(x) = \frac{x+2}{2x-3}$ f est une fonction homographique

1.2 Ensemble de définition

Définition 2 : L'ensemble définition d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction est définie

Exemples :

- La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{4-x}$ est telle que $D_f =]-\infty ; 4]$ (on doit avoir $4-x \geq 0$)
- La fonction g définie par $g(x) = \frac{3}{x^2-5x-6}$ est telle que $D_g = \mathbb{R} - \{-1 ; 6\}$ (on doit avoir $x^2-5x-6 \neq 0$, $x = -1$ racine évidente)

1.3 Comparaison de fonctions

Définition 3 : On dit que deux fonctions f et g sont égales si et seulement si :

- Elles ont même ensemble de définition : $D_f = D_g$
- Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = g(x)$

Exemple : Les fonction f et g suivantes sont-elles égales ?

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f , on doit avoir : $\frac{x-1}{x+3} \geq 0$, soit $D_f =]-\infty; -3[\cup [1; +\infty[$

Pour g , on doit avoir : $x-1 \geq 0$ et $x+3 > 0$, soit $D_g = [1; +\infty[$

On a donc : $D_f \neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales.

Remarque : Cependant sur $[1; +\infty[$, on a $f(x) = g(x)$

Définition 4 : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .

On dit que, sur I :

- f est inférieure à g , noté $f < g$ si, et seulement si : $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$.
- f est positive, noté $f > 0$ si, et seulement si : $\forall x \in I, f(x) \geq 0$.
- f admet un maximum x_M si, et seulement si : $\forall x \in I, f(x) \leq f(x_M)$.
- f admet un minimum x_m , si, et seulement si : $\forall x \in I, f(x) \geq f(x_m)$.
- f admet un extremum ssi, f admet un minimum ou un maximum.

Remarque : Deux fonctions ne sont pas toujours comparables (contrairement aux nombres réels). On dit que la relation d'ordre n'est pas totale. Par exemple :

Les fonctions f et g définies respectivement sur \mathbb{R} par : $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

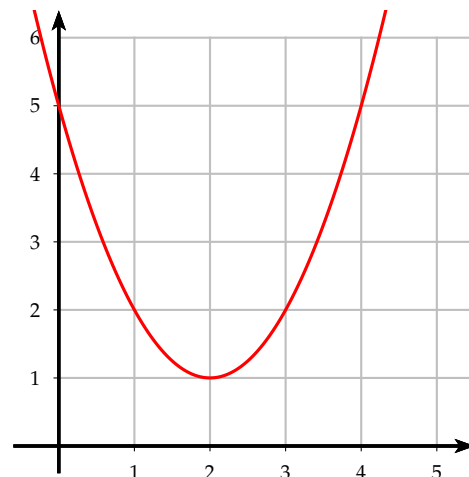
- Si $0 < x < 1$, $x > x^2$, soit $f > g$ ($0,5 > 0,5^2$)
- Si $x > 1$, $x < x^2$, soit $f < g$ ($2 < 2^2$)

Exemple : La fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x-2)^2 + 1$

La fonction f a pour tableau de variation :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

La fonction f est donc positive $f \geq 1$ et admet en 2 un minimum de 1 sur \mathbb{R} .



2 Variation d'une fonction

Définition 5 : Soit I un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non).

a et b deux réel de I

Soit f une fonction définie au moins sur I . On dit que :

- f est **croissante** sur I si, et seulement si : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
- f est **décroissante** sur I si, et seulement si : $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
- f est **monotone** sur I si, et seulement si f est croissante ou décroissante sur I .

Remarque : On dit qu'une fonction croissante conserve la relation d'ordre et qu'une fonction décroissante inverse la relation d'ordre.

Pour montrer la monotonie d'une fonction sur I , on prendra deux réels a et b de I tel que $a > b$ et l'on étudiera le signe de $f(a) - f(b)$. Si le signe est positif la fonction est croissante, si le signe est négatif la fonction est décroissante.

Exemple : La fonction affine f définie par : $f(x) = 2x + 3$ est croissante sur \mathbb{R} car son coefficient directeur est positif.

La fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$ ou $]-\infty ; 0[$.

3 Résolution graphique

Soit la fonction f définie sur $[-1, 8 ; 2, 9]$ par : $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 15$.

À l'aide d'une représentation graphique, résoudre les questions suivantes.

Toutes les valeurs seront données à la précision du dixième

1) Déterminer le tableau de variation de la fonction f

2) Résoudre les équations suivantes :

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 13$

3) D'une façon générale donner le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$ où m est un réel quelconque.

4) Résoudre les inéquations suivantes :

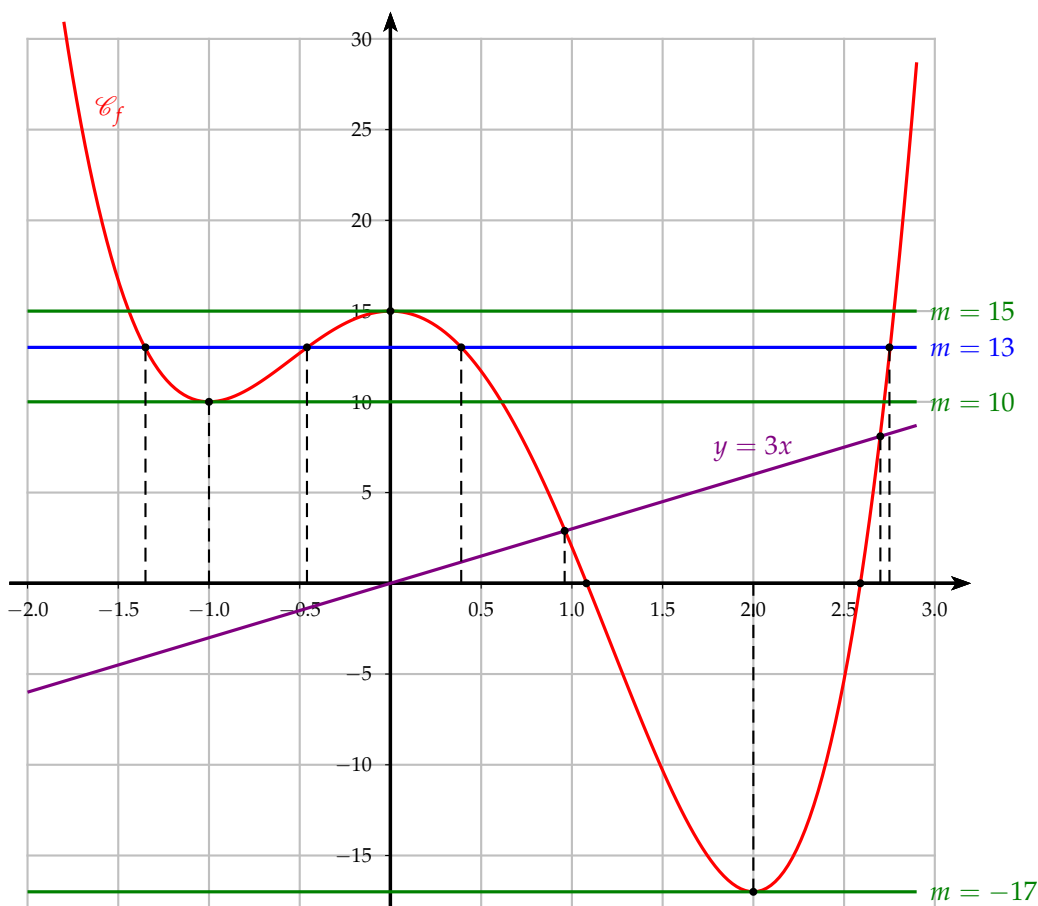
a) $f(x) \leq 0$

b) $f(x) > 13$

5) Résoudre l'équation $f(x) = 3x$



On programme cette fonction dans une calculette ou un ordinateur. On trouve alors la représentation suivante :



1) On obtient le tableau de variation suivant :

x	-1.8	-1	0	2	2.9
$f(x)$	31		15		29
		10		-17	

- 2) a) $f(x) = 0$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses. Avec la calculatrice, aller dans "calcul" sélectionner "zero". On obtient : $x_1 \simeq 1,1$ et $x_2 \simeq 2,6$
- b) $f(x) = 13$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec la droite $y = 13$. Dans la calculatrice, entrer la fonction " $Y = 13$ " puis aller dans "calcul" sélectionner "intersect". On obtient : $x_1 \simeq -1,3$, $x_2 \simeq -0,4$, $x_3 \simeq 0,4$ et $x_4 \simeq 2,75$.
- 3) $f(x) = m$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec la droite $y = m$. On obtient donc suivant les valeurs de m :
- Si $m < -17$: l'équation n'a pas de solution
 - Si $m = -17$: l'équation admet une solution (positive)
 - Si $-17 < m < 10$: l'équation admet deux solutions (2 positives)
 - Si $m = 10$: l'équation admet 3 solutions (1 négative et 2 positives)
 - Si $10 < m < 15$: l'équation admet 4 solutions (2 négatives et 2 positives)

- Si $m = 15$: l'équation admet 3 solutions (1 négative, 1 nulle et 1 positive)
 - Si $m > 15$: l'équation admet 2 solutions (1 négative et 1 positive)
- 4) a) $f(x) \leq 0$: on cherche les abscisses des points de la courbe \mathcal{C}_f qui sont sur ou en dessous de la droite des abscisses, on a donc : $S = [1, 1 ; 2, 6]$
- b) $f(x) > 13$: on cherche les abscisses des points de la courbe \mathcal{C}_f qui sont au dessus de la droite d'équation $y = 13$, on a donc :
- $$S = [-1, 8 ; -1, 3[\cup] - 0, 4 ; 0, 4[\cup] 2, 75 ; 2, 9]$$
- 5) $f(x) = 3x$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec la droite d'équation $y = 3x$. On trace la droite $y = 3x$ puis on lit les solutions : $x_1 \simeq 0,9$ et $x_2 \simeq 2,7$

4 Fonctions de référence

4.1 Fonction affine

Propriété 1 : Une fonction affine f est une fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ax + b$$

Le signe du coefficient directeur a donne les variations de la fonction :

si $a > 0$, f est croissante et si $a < 0$, f est décroissante

La représentation d'une fonction affine est une **droite** qui passe par le point $(0 ; b)$

4.2 Fonction carrée

Propriété 2 : La fonction carrée f est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2$$

La fonction carrée est décroissante sur \mathbb{R}_- et croissante sur \mathbb{R}_+ .

La représentation de la fonction carrée est une **parabole** d'axe Oy dont le sommet est l'origine.

4.3 Fonction inverse

Propriété 3 : La fonction inverse f est la fonction définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

La fonction inverse est décroissante sur $] - \infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$

La représentation de la fonction inverse est une **hyperbole** équilatère dont le point de symétrie est l'origine et les **asymptotes** les axes de coordonnées.

⚠ C'est une faute de dire que la fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}^* car la monotonie s'étudie sur un intervalle.

4.4 La fonction racine carrée

4.4.1 Étude de la fonction racine carrée

Propriété 4 : La fonction racine carrée est la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

La fonction racine carrée est croissante sur \mathbb{R}_+ .

La représentation de la fonction racine carrée est la demi-parabole d'ordonnées positives d'axe Ox .

Montrons que la fonction racine carrée est croissante sur \mathbb{R}_+ . Soit a et b deux réels positifs ou nuls tel que $a > b$. Déterminons le signe de $f(a) - f(b)$.

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

- Par définition de la racine carrée, on a $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$
- De plus comme $a > b$, on a : $a - b > 0$
- On a donc $f(a) - f(b) > 0$

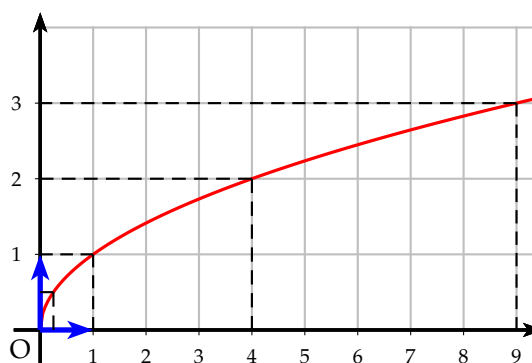
La fonction racine carrée est donc croissante sur \mathbb{R}_+ . On a alors le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
\sqrt{x}	0	$+\infty$

La représentation de la fonction racine carrée est une demi-parabole d'ordonnées positives d'axe Ox . Elle admet une tangente verticale en 0.

On peut remplir le tableau de valeur suivant :

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
\sqrt{x}	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3



4.4.2 Comparaison des fonctions carrée, identité et racine carrée

Théorème 1 : Pour tout réel x positif ou nul, on a les relations suivante :

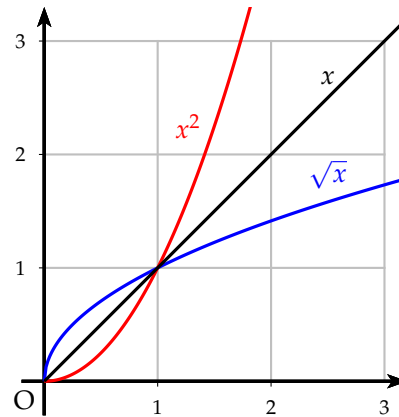
$$\text{si } x \in [0 ; 1], \quad x^2 \leq x \leq \sqrt{x} \quad \text{et si } x \in [1 ; +\infty[, \quad \sqrt{x} \leq x \leq x^2$$

Remarque : On observe que le rapport de ces fonctions s'inverse autour de 1 comme le montrent les représentations suivantes :

On a tracé les fonctions carrée, identité et racine carrée.

On constate que :

- si $x < 1$ la fonction carrée est **en dessous** de la fonction identité qui est **en dessous** de la fonction racine carrée.
- si $x > 1$ la fonction carrée est **au dessus** de la fonction identité qui est **au dessus** de la fonction racine carrée.



Soit x un réel positif ou nul : $(\forall x \geq 0, \sqrt{x^2} = |x| = x)$

- si $x \leq 1$, on multiplie par x chaque côté de l'inégalité donc $x^2 \leq x$
Comme la fonction racine carrée est croissante sur \mathbb{R}_+ , elle ne change pas les inégalités, donc $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x} \Rightarrow x \leq \sqrt{x}$
- si $x \geq 1$, on multiplie par x chaque côté de l'inégalité donc $x^2 \geq x$
Comme la fonction racine carrée est croissante sur \mathbb{R}_+ , elle ne change pas les inégalités, donc $\sqrt{x^2} \geq \sqrt{x} \Rightarrow x \geq \sqrt{x}$

4.5 La fonction valeur absolue

4.5.1 Définition

La notion de valeur absolue est utilisée lorsque l'on s'intéresse à la valeur d'un nombre sans son signe. C'est à dire que l'on ne considère par exemple dans -5 que le nombre 5.

Définition 6 : On appelle valeur absolue d'un nombre réel x , le nombre noté $|x|$ tel que :

$$|x| = x \quad \text{si } x \geq 0$$

$$|x| = -x \quad \text{si } x < 0$$

Exemple : $|-5| = 5$ et $|21| = 21$

Remarque : La valeur absolue représente la distance entre deux nombres : en effet dans la distance, on ne s'intéresse qu'à la valeur positive. La distance d entre 8 et 3 vaut $d = |8 - 3| = |3 - 8| = 5$

Algorithme : On peut proposer l'algorithme suivant pour calculer la valeur absolue d'un nombre réel.

On remarque qu'il n'est pas nécessaire de tester si x est positif, car dans ce cas la valeur absolue ne "fait" rien.

Variables : X : réel Entrées et initialisation Lire X Traitement si $X < 0$ alors $-X \rightarrow X$ fin Sorties : Afficher X
--

Propriété 5 : La fonction valeur absolue possède les propriétés suivantes :

- $|x - a|$ représente la distance de x au nombre a .
- On a l'égalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$
- Deux nombres opposés ont même valeur absolue : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |-x|$
On dit que la fonction valeur absolue est **paire**
- Deux valeurs absolues sont égales ssi, les nombres sont égaux ou opposés :

$$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$$

- L'inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$
- On peut exprimer un intervalle à l'aide d'une valeur absolue, avec $r > 0$:

$$|x - a| < r \Leftrightarrow x \in]a - r ; a + r[$$

r est alors le rayon de l'intervalle.

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $|2x - 2| = |3 - x|$

comme $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$, on a alors :

$$2x - 2 = 3 - x \text{ ou } 2x - 2 = -3 + x \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ ou } x = -1$$

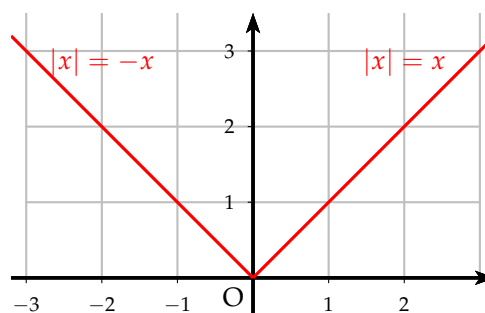
4.5.2 Variation

La fonction valeur absolue est une fonction affine définie par morceaux. Sa représentation est alors deux demi-droites.

- Si $x > 0$, $|x| = x$ la fonction est croissante
- Si $x < 0$, $|x| = -x$ la fonction est décroissante

On obtient alors le tableau de variation et la représentation suivante :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ x $	$+\infty$	0	$+\infty$



La représentation de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

5 Sens de variation des fonctions associées

5.1 Somme de fonctions

Théorème 2 : Soit un réel k et 2 fonctions u et v définies sur un intervalle I

- Les fonction u et $u + k$ ont même sens de variation.
- Si les fonctions u et v sont croissantes alors $u + v$ est croissante.
- Si les fonctions u et v sont décroissantes alors $u + v$ est décroissante.

⚠ Si les fonction u et v n'ont pas les mêmes variations, on ne peut rien dire de leur somme.

Exemples : Déterminer les variations des fonctions suivantes définies sur I

a) $f(x) = x^2 - 5$ avec $I = \mathbb{R}$

b) $g(x) = -5x + 3 + \frac{1}{x}$ avec $I =]0 ; +\infty[$

c) $h(x) = x^2 + 2x - 5$ avec $I = [0 ; +\infty[$



a) On décompose la fonction f en $u + k$ avec $u(x) = x^2$ et $k = -5$. La fonction f a donc les mêmes variations que la fonction carrée.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-5	$+\infty$

b) On décompose la fonction g en $u + v$ avec $u(x) = -5x + 3$ et $v(x) = \frac{1}{x}$

- La fonction u est une fonction affine de coefficient directeur $a = -5 < 0$.
La fonction u est donc décroissante sur $]0 ; +\infty[$
- La fonction v est la fonction inverse qui est décroissante sur $]0 ; +\infty[$

Par somme de fonctions décroissantes, la fonction g est décroissante sur $]0 ; +\infty[$

c) On décompose la fonction h en $u + v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = 2x - 5$.

- La fonction u est la fonction carrée qui est croissante sur \mathbb{R}_+ .
- La fonction v est une fonction affine de coefficient directeur $a = 2 > 0$.
La fonction v est donc croissante sur \mathbb{R}_+ .

Par somme la fonction h est croissante sur \mathbb{R}_+

⚠ On ne peut rien dire de la fonction h sur \mathbb{R}_- car les fonction u et v ont des variations inverses. (u décroissante et v croissante).

5.2 Produit par une constante

Théorème 3 : Soit un réel λ et une fonction u définie sur un intervalle I

- Si $\lambda > 0$, les fonction u et λu ont les mêmes variations
- Si $\lambda < 0$, les fonction u et λu ont des variations contraires

Exemple : Tableau de variations de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = -\frac{4}{x}$

On décompose la fonction f en u et λ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ et $\lambda = -4$.

- Comme $\lambda < 0$ les fonctions u et λu ont des variations contraires.
- u est la fonction inverse donc décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$, donc
- Par produit la fonction f est croissante sur $] -\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$.

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0$

5.3 Racine carrée et inverse d'une fonction

Théorème 4 : Soit une fonction u définie sur un intervalle I

Racine carrée

Soit une fonction u **positive** sur I , alors les fonctions u et \sqrt{u} ont les mêmes variations

Inverse

Soit une fonction u **non nul**.

Si u a un **signe constant** sur I , alors les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des variations contraires

Cas pour lequel la fonction u est croissante sur un intervalle I .

Comme la fonction u est croissante, si $a > b$ sont deux réels de I , on a :

$$u(a) > u(b)$$

- La fonction racine est croissante sur \mathbb{R}_+ , comme $u \geq 0$, on a alors :

$$\sqrt{u(a)} > \sqrt{u(b)} \quad \text{la fonction } \sqrt{u} \text{ est croissante sur } I$$

- La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$, et u est non nulle si u a un signe constant, on a alors :

$$\frac{1}{u(a)} < \frac{1}{u(b)} \quad \text{la fonction } \frac{1}{u} \text{ est décroissante sur } I$$

Exemples :

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f puis les variations de la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$.



f est définie si, et seulement si : $1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f =] - \infty ; \frac{1}{2} [$

Pour les variations, on décompose la fonction f en \sqrt{u} avec $u(x) = 1 - 2x$

La fonction u est une fonction affine de coefficient directeur $a = -\frac{1}{2} < 0$.

La fonction u est donc décroissante sur D_f .

Comme les fonctions u et \sqrt{u} ont les mêmes variations, la fonction f est décroissante sur D_f

- 2) Déterminer les variations sur $] - 3 ; +\infty [$ de g telle que : $g(x) = \frac{1}{x + 3}$



On décompose la fonction g en $\frac{1}{u}$ avec $u(x) = x + 3$.

La fonction u est une fonction affine qui est positive sur $] - 3 ; +\infty [$ et croissante car de coefficient directeur $a = 1 > 0$.

Comme les fonctions u et $\frac{1}{u}$ ont des variations contraires, la fonction g est décroissante sur $] - 3 ; +\infty [$

5.4 Exercices d'application

5.4.1 Encadrement d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $I = \left[\frac{5}{2} ; +\infty [$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 5}}$

- Déterminer les variations de f sur I
- Donner un encadrement de la fonction f pour les valeurs de $x \in [3 ; 7]$



- a) On peut vérifier aisément que la fonction f existe bien sur l'intervalle I .

On décompose la fonction f en $\frac{1}{\sqrt{u}}$ et on pose $v = \sqrt{u}$.

On a donc : $u(x) = 2x - 5$.

- u est une fonction affine de coefficient directeur $a = 2 > 0$, donc la fonction u est croissante sur I .
- u et \sqrt{u} ont les mêmes variations donc la fonction v est croissante sur I .
- v et $\frac{1}{v}$ ont des variations contraires. La fonction $\frac{1}{v}$ est décroissante sur I .

De ces résultats, on en déduit que la fonction f est décroissante sur I

b) Comme la fonction f est décroissante, on en déduit que si $x \in [3 ; 7]$:

$$f(7) \leq f(x) \leq f(3) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$$

Conclusion : si $x \in [3 ; 7]$ alors $f(x) \in \left[\frac{1}{3} ; 1 \right]$

5.4.2 Tableau de variation et courbe d'une fonction

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

- Montrer que la fonction f est définie sur \mathbb{R}
- Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R}
- Vérifier ces variations en traçant \mathcal{C}_f , la courbe représentative de la fonction f



a) On pose : $u(x) = x^2 - 2x + 3$. On cherche les racines de $u(x)$

$$\Delta = 4 - 12 = -8 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ pas de racine}$$

$u(x)$ a donc un signe constant or $a = 1 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$

f est donc définie sur \mathbb{R}

b) On décompose la fonction f en \sqrt{u} .

- On cherche la forme canonique de $u(x)$

$$u(x) = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 - 1 + 3 = (x - 1)^2 + 2$$

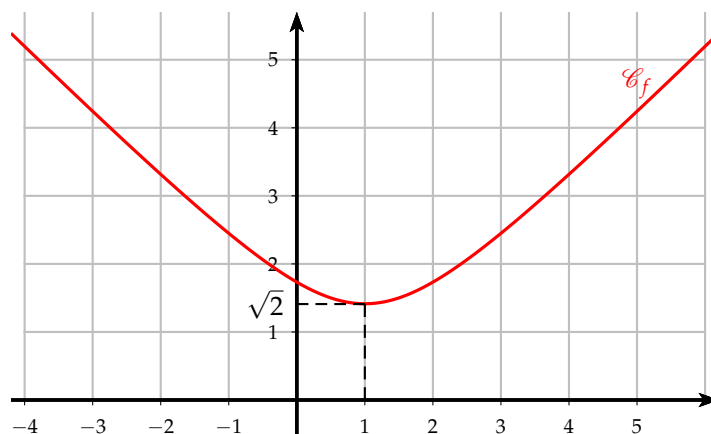
- On a alors les variations de u

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

- Comme u et \sqrt{u} ont les mêmes variations, on en déduit les variations de f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$

c) On rentre la fonction f dans une calculette ou sur un ordinateur, on obtient alors la courbe suivante :



Remarque : La courbe admet un axe de symétrie : $x = 1$.

5.4.3 Variation d'une fonction homographique

Soit la fonction f définie sur $] -\infty ; -2[\cup] -2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

- Montrer qu'il existe des réels a et b tels que : $f(x) = a + \frac{b}{x+2}$
- En déduire les variations de la fonction f sur $] -\infty ; -2[\cup] -2 ; +\infty[$
- Dresser le tableau de variation de la fonction f



- On réduit la deuxième forme de f au même dénominateur puis on identifie à la première forme :

$$a + \frac{b}{x+2} = \frac{ax + 2a + b}{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 - 2a = -1 \end{cases}$$

On a donc : $f(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$

- On pose $I =] -\infty ; -2[$ et $J =] -2 ; +\infty[$.

On décompose la fonction $f = 2 + v$ et $v = -\frac{1}{u}$ avec $u(x) = x + 2$

- u est une fonction affine avec $a = 1 > 0$ donc u est croissante sur I et J .
- u et $\frac{1}{u}$ ont des variations contraires donc $\frac{1}{u}$ est décroissante sur I et J
- v et $\frac{1}{u}$ ont des variations contraires ($\lambda = -1$). v est croissante sur I et J .
- v et $v + 2$ ont les mêmes variations donc $v + 2$ est croissante sur I et J

La fonction f est croissante sur I et J

- On peut alors dresser le tableau de variation de la fonction f .
Pour les grandes valeurs de x , la fonction f se rapproche de 2.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$	2