Contrôle de mathématiques

Lundi 21 mars 2016

EXERCICE 1

Monotonie d'une suite **(2 points)**

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 2n^2 - n - 2$

1) Calculer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.
2) Que peut-on dire sur la variation de la suite ?

EXERCICE 2

Suite arithmétique et suite géométrique **(5 points)**

1) La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
   On donne $u_{10} = \dfrac{1}{2}$ et $u_{20} = \dfrac{7}{2}$.
   a) Déterminer la raison r et le premier terme u_0.
   b) Calculer u_{100}
2) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0.
   On donne $v_4 = 48$ et $v_7 = 384$
   a) Déterminer la raison q et le premier terme v_0
   b) Déterminer n pour que $v_n = 24\,576$
   c) Calculer la somme : $S = 3 + 6 + 12 + \cdots + 24\,576$

EXERCICE 3

Limite d'une suite **(5 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   b) La suite (u_n) est-elle géométrique ? Pourquoi ?
2) On pose pour tout entier n, $v_n = u_n - 6$
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on donnera la raison q et le premier terme v_0.
   b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 4

Visualisation d'une suite **(3 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{u_n} \end{cases}$

Sur l'annexe est tracé la courbe représentative de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

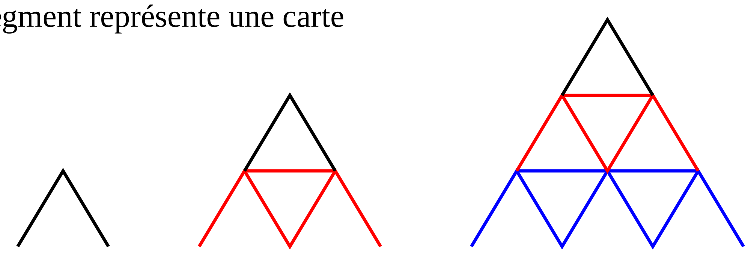
1) a) Construire, sur le graphique, les 4 premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses. On laissera les traits de construction.
   b) À quoi sert la droite d'équation $y = x$ sur le graphique ?
   c) Conjecturer la variation et la convergence de la suite (u_n)
2) Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il détermine à partir de quel rang n, le terme u_n se trouve à moins de 10^{-3} de la limite de la suite.

Variables : N : entiers et U réel
Entrées et initialisation
  $\cdots \to N$
  $\cdots \to U$
Traitement
  tant que $|U - 4| \ldots\ldots$ **faire**
    $\cdots \to N$
    $\ldots\cdots \to U$
  fin
Sorties : Afficher . . .

EXERCICE 5

Châteaux de cartes **(5 points)**

On construit des châteaux de cartes de plus en hauts comme indiqués sur la figure ci-dessous. Un segment représente une carte



Étape 1 Étape 2 Étape 3

1) Calculer le nombre de cartes nécessaires pour les étapes 4 et 5.
2) Montrer qu'à l'étape n le nombre de cartes nécessaires S_n peut se mettre sous la forme :

$$S_n = 2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1)$$

3) Calculer S_n en fonction de n puis déterminer S_{10}.
4) On donne l'algorithme suivant qui détermine le nombre d'étages maximum k que l'on que l'on peut construire avec un nombre de cartes n donné.

Variables : $N,\ K,\ S$: entiers
Entrées et initialisation
  Lire N
  $1 \to K$
  $2 \to S$
Traitement
  tant que $S + 3K + 2 \leqslant N$ **faire**
    $K + 1 \to K$
    $S + 3K - 1 \to S$
  fin
Sorties : Afficher K

   a) Expliquer la condition sur la boucle "Tant que".
   b) Combien d'étages peut-on construire avec 1200 cartes ?
      Combien restera t-il de cartes ?

Nom :

Prénom :

Annexe de l'exercice 4

(À rendre avec la copie)