Correction contrôle de mathématiques

Du mardi 15 décembre 2015

EXERCICE 1

Questions de cours **(3 points)**

1) Une fonction f admet un nombre dérivé, noté $f'(a)$, en a, si et seulement si, le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite, c'est à dire :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$
$$= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

On passe à la limite : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

EXERCICE 2

Nombre dérivé **(2 points)**

x	-3	0	2	5
$f(x)$	2	4	2	1
$f'(x)$	2	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

EXERCICE 3

Calcul de dérivée **(9 points)**

1) Dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 15x^2 - 8x - 2$

2) Dérivable sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\dfrac{12}{x^5}$

3) Dérivable sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = -2\sqrt{x} + (1-2x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-4x+1-2x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1-6x}{2\sqrt{x}}$

4) Dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$, $f'(x) = -\dfrac{2 \times 3}{(3x-4)^2} = \dfrac{-6}{(3x-4)^2}$

5) Dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$,

$$f'(x) = \frac{2(3x+1) - 3(2x+5)}{(3x+1)^2} = \frac{6x+2-6x-15}{(3x+1)^2} = \frac{-13}{(3x+1)^2}$$

6) Condition $2x-5>0 \quad\Leftrightarrow\quad x>\dfrac{5}{2}$. Dérivable sur $\left]\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$

$$f'(x)=3\sqrt{2x-5}+3x\times\frac{2}{2\sqrt{2x-5}}=\frac{3(2x-5)+3x}{\sqrt{2x-5}}=\frac{9x-15}{\sqrt{2x-5}}$$

7) Dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\quad x^2+5\geqslant 5>0$

$$f'(x)=\frac{1(x^2+5)-2x(x-4)}{(x^2+5)^2}=\frac{x^2+5-2x^2+8x}{(x^2+5)^2}=\frac{-x^2+8x+5}{(x^2+5)^2}$$

8) Dérivable sur $\mathbb{R}$, $\quad f'(x)=2(6x-5)(3x^2-5x+2)$

EXERCICE 4

Tangente à une courbe **(3 points)**

1) $f'(x)=6x-4$.

2) L'équation de la tangente T_2 en 2 a pour équation : $\quad y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$f'(2)=8$ et $\quad f(2)=12-8+1=5$ donc $T_2\ :\ y=8(x-2)+5 \quad\Leftrightarrow\quad y=8x-11$

3) La tangente est parallèle à l'axe des abscisse si, et seulement si :

$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 6x-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{2}{3}$$

Pour $\quad a=\dfrac{2}{3}$ la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

4) Pour que la tangente soit parallèle à la droite d d'équation $y=-2x+5$, il faut que :

$$f'(x)=-2 \quad\Leftrightarrow\quad 6x-4=-2 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{3}.$$

Pour $\quad a=\dfrac{1}{3}$ la tangente est parallèle à la droite d.

EXERCICE 5

Signe de la dérivée **(3 points)**

1) $$f'(x)=1-\frac{2\times 2}{(2x-3)^2}=\frac{(2x-3)^2-4}{(2x-3)^2}=\frac{(2x-3-2)(2x-3+2)}{(2x-5)^2}=\frac{(2x-5)(2x-1)}{(2x-3)^2}$$

2) $f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x-5=0$ ou $2x-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{5}{2}$ ou $x=\dfrac{1}{2}$

$\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$, $\quad (2x-3)^2>0$ donc le signe de $f'(x)=$ le signe $(2x-5)(2x-1)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	