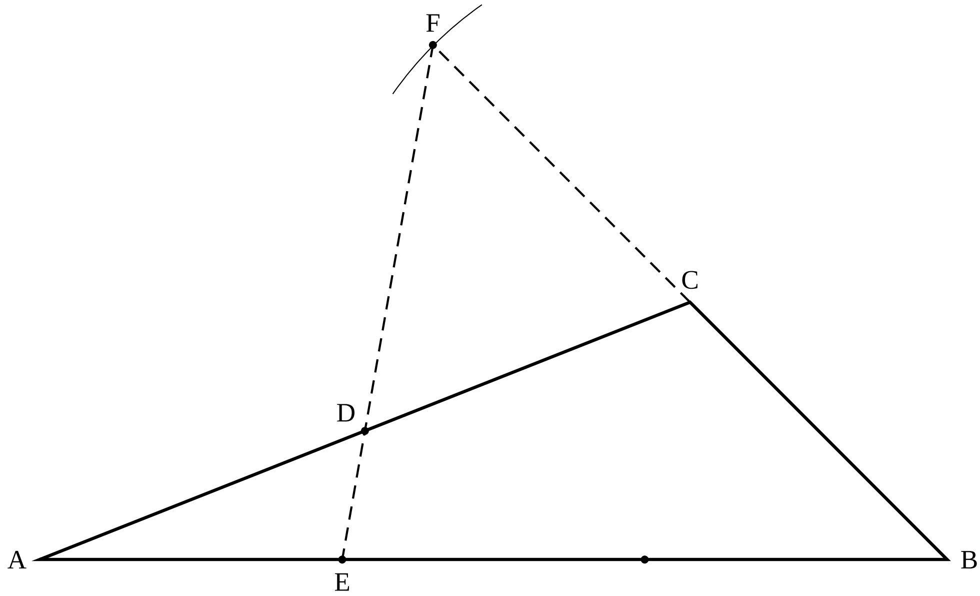
Correction contrôle de mathématiques
Du lundi 26 mars 2018

EXERCICE 1

Alignement **(5 points)**

1) On obtient la figure suivante :



2) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}$

$= -\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

3) a) D'après la question précédente, on a : $\overrightarrow{DE}\left(\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{DF}\left(-1\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$.

b) $\det(\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & -1 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0.$

Comme $\det(\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}) = 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires et donc les points sont alignés.

EXERCICE 2

Lecture de l'équation d'une droite **(3 points)**

1) On a les équations réduites puis cartésiennes suivantes :

- $d_1\ :\ y = -\dfrac{1}{3}x + 1 \overset{\times 3}{\Leftrightarrow} 3y = -x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3y - 3 = 0$

- $d_2 \ : \ y = \dfrac{2,5}{3}x + 2,5 \ \overset{\times 6}{\Leftrightarrow} \ 6y = 5x + 15 \ \Leftrightarrow \ 5x - 6y + 15 = 0$
- $d_3 \ : \ y = 3,5x - 1,5 \ \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} \ 2y = 7x - 3 \ \Leftrightarrow \ 7x - 2y - 3 = 0$

2) $\mathrm{A} = d_1 \cap d_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{A} \ : \begin{cases} x + 3y = 3 & \times (2) \\ 7x - 2y = 3 & \times (3) \end{cases}$

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 6 \\ 21x - 6y &= 9 \\ \hline 23x &= 15 \\ x &= \frac{15}{23} \end{aligned}$$

On remplace $x = \dfrac{15}{23}$ dans la 1re équation

$$\frac{15}{23} + 3y = 3 \ \Leftrightarrow \ 3y = 3 - \frac{15}{23} = \frac{69-15}{23} = \frac{54}{23}$$

$$\Leftrightarrow \ y = \frac{54}{23} \times \frac{1}{3} = \frac{18}{23}$$

On trouve alors $\mathrm{A}\left(\dfrac{15}{23} \ ; \ \dfrac{18}{23}\right)$

Exercice 3

Droites **(5 points)**

1) Soit M(x, y) un point de la droite (AB). Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont alors colinéaires donc $\det(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = 0 \ \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1+1 \\ y-1 & \dfrac{7}{3} - 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ y-1 & \dfrac{4}{3} \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{4}{3}(x+1) - 2(y-1) = 0$$

$$\overset{\times 3}{\Leftrightarrow} \ 4(x+1) - 6(y-1) = 0 \ \Leftrightarrow \ 4x - 6y + 10 = 0 \ \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} \ 2x - 3y + 5 = 0$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est : $2x - 3y + 5 = 0$.

2) a) $\vec{u}(3, 2)$ et $\vec{v}(-2, 3)$ sont des vecteurs directeurs respectivement des droites (AB) et Δ.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 = 13$$

Comme $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites (AB) et Δ sont sécantes.

b) $\mathrm{I} = (\mathrm{AB}) \cap \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{I} \ : \begin{cases} 2x - 3y = -5 & \times (2) \\ 3x + 2y = \dfrac{10}{3} & \times (3) \end{cases}$

$$\begin{aligned} 4x - 6y &= -10 \\ 9x - 6y &= 10 \\ \hline 13x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

On remplace $x = 0$ dans la 1re équation

$$-3y = -5 \ \Leftrightarrow \ y = \frac{5}{3}$$

On trouve alors $\mathrm{I}\left(0 \ ; \ \dfrac{5}{3}\right)$

3) a) Si M est sur Δ, ses coordonnées vérifient l'équation de la droite Δ, en remplaçant :

$$3 \times 2 + 2 \times \left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{10}{3} = 6 - \frac{8}{3} - \frac{10}{3} = \frac{18-18}{3} = 0 \ \text{ donc } \ \mathrm{M} \in \Delta$$

b) Si Δ est la médiatrice du segment [AB] alors le milieu du segment [AB] est sur Δ et M est équidistant de A et de B.

- Coordonnées du milieu de [AB] :

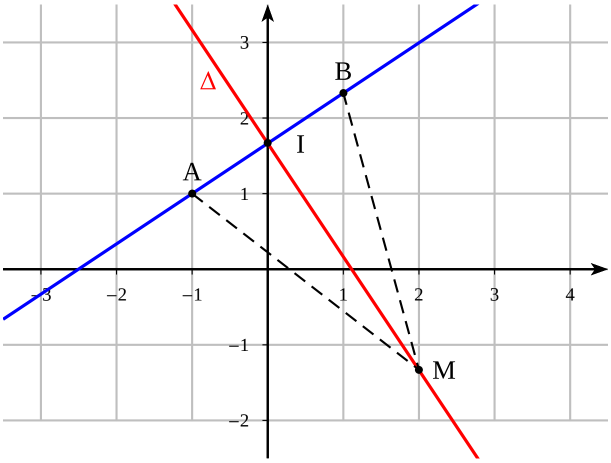
$$\left(\frac{x_A + x_B}{2} \; ; \; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{-1+1}{2} \; ; \; \frac{1+\frac{7}{3}}{2}\right) = \left(0 \; ; \; \frac{5}{3}\right) = \text{I} \quad \text{or} \quad \text{I} \in \Delta$$

- M équidistant de A et de B :

$$\text{AM} = \sqrt{(2+1)^2 + \left(-\frac{4}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{49}{9}} = \frac{\sqrt{130}}{3}$$

$$\text{BM} = \sqrt{(2-1)^2 + \left(-\frac{4}{3} - \frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{121}{9}} = \frac{\sqrt{130}}{3}$$

La droite Δ est donc la médiatrice du segment [AB].



Exercice 4

Mesure principale **(2 points)**

On obtient les mesures principales suivantes :

$$\frac{20\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \; , \quad -\frac{18\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} \quad [2\pi] \; , \quad \frac{29\pi}{8} = -\frac{3\pi}{8} \quad [2\pi] \; ,$$

$$\frac{192\pi}{6} = 0 \quad [2\pi] \; ; \quad -\frac{9\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \; , \quad \frac{19\pi}{7} = \frac{5\pi}{7} \quad [2\pi]$$

Exercice 5

Trigonométrie **(5 points)**

1) On obtient les lignes trigonométriques suivantes :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x = \frac{1}{5}$
- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$, or $x \in [0, \pi]$ donc $\sin x > 0$ d'où $\sin x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$
- $\sin(\pi - x) = \sin x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

- $\tan(\pi - x) = -\tan x = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = 2\sqrt{6}$

2) On obtient les mesures principales suivantes :

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} \quad ; \quad x_2 = -\frac{3\pi}{4} \quad ; \quad x_3 = -\frac{\pi}{2}$$

3) Dans $\mathbb{R}$, $\quad 2\sin x + \sqrt{3} = 0 \iff \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

On obtient les solutions suivantes :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + k\,2\pi \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{3} + k\,2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + k\,2\pi \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + k\,2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + k\,2\pi \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k\,2\pi \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$