Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 16 octobre 2017

EXERCICE 1

Forme canonique et représentation **(3 points)**

1) $f(x) = 4x^2 + 4x - 3 = 4\left(x^2 + x - \dfrac{3}{4}\right) = 4\left[\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}\right] = 4\left[\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - 1\right]$

2) On peut mettre aussi $f(x)$ sous la forme : $f(x) = 4\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - 4$.

Le sommet S de la parabole $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnées : $S\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ -4\right)$

3) Comme $a = 4 > 0$ la parabole $\mathscr{C}_f$ est tournée vers le haut.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-4	↗ $+\infty$

EXERCICE 2

Équations **(5 points)**

1) a) $x_1 = 1$ est racine évidente car $(2 - 1 - 1 = 0)$, $P = -\dfrac{1}{2}$ donc $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Les racines de $f(x)$ sont $-\dfrac{1}{2}$ et 1.

b) $f(x) = 2(x - 1)\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = (x - 1)(2x + 1)$

2) a) $x^2 - x - 12 = 0$, on a $\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$, $\Delta > 0$ deux solutions

$$x_1 = \frac{1+7}{2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-7}{2} = -3 \quad \text{soit } S = \{-3\ ;\ 4\}$$

b) $3x^2 - \sqrt{6}x + 1 = 0$, on a $\Delta = 6 - 12 = -6$, $\Delta < 0$ pas de solution $S = \varnothing$

c) $\dfrac{3x^2 + 10x + 8}{x + 2} = 2x + 5 \qquad D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$x \in \mathbb{D}_f$, on effectue un produit en croix

$3x^2 + 10x + 8 = (x + 2)(2x + 5)$

$3x^2 + 10x + 8 = 2x^2 + 5x + 4x + 10$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x_1 = 1 \in D_f$ racine évidente, $P = -2$ donc $x_2 = -2 \notin D_f$

$S = \{1\}$

d) $3x^4 - 4x^2 - 15 = 0$ on pose $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$, l'équation devient :

$X^2 - 4X - 15 = 0$, on a $\Delta = 16 + 180 = 196 = 14^2$, $\Delta > 0$ deux solutions

$$X_1 = \frac{4+14}{6} = 3 \text{ (retenu)} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{4-14}{6} = -\frac{5}{2} \text{ (non retenu)}$$

On revient à x : $x^2 = 3$ donc $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ d'où $S = \left\{-\sqrt{3}\,;\ \sqrt{3}\right\}$

Exercice 3

Inéquation **(5 points)**

1) $-x^2 + 4x + 5 > 0$,

$x_1 = -1$ racine évidente car $(-1 - 4 + 5 = 0)$, $P = -5$ donc $x_2 = 5$

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$-x^2+4x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-1\,;\ 5[$

2) $(2x+3)(2x^2 - 5x - 3) > 0$, on détermine les valeurs frontières :

- $x = -\dfrac{3}{2}$
- racines de $2x^2 - 5x - 3$ on a $\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2$, $\Delta > 0$ deux racines :

$$x_1 = \frac{5+7}{4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

On remplit en tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x^2-5x-3$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$(2x+3)(2x^2-5x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S = \left]-\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\right[\cup\,]3\,;+\infty[$$

3) $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x} \leqslant \dfrac{3x^2 - 5x}{x(x-1)}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^* - \{1\}$

$x \in D_f$, on réduit au même dénominateur à gauche

$$\frac{2x + 3x - 3 - 3x^2 + 5x}{x(x-1)} \leqslant 0$$

$$= \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x(x-1)} \leqslant 0$$

racines de $-3x^2 + 10x - 3$ on a $\Delta = 100 - 36 = 64 = 8^2$, $\Delta > 0$ deux racines :

$$x_1 = \frac{-10+8}{-6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-10-8}{-6} = 3$$

On remplit en tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		1		3		$+\infty$
$-3x^2+10x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-3x^2+10x-3}{x(x-1)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$$S =]-\infty\,;\,0[\cup\left[\frac{1}{3}\,;\,1\right[\ \cup\ [3\,;+\infty[$$

Exercice 4

Équation paramétrique **(4 points)**

1) Si $m=-4$ l'équation est du premier degré. On a alors :
   On remplace m par (-4) : $-3x-5=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\dfrac{5}{3}$

2) Si $x_1=1$ est solution alors $m+4+2m+5+m-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4m=-8 \quad\Leftrightarrow\quad m=-2$
   $P=\dfrac{m-1}{m+4} \overset{m=-2}{=} -\dfrac{3}{2}$ donc $x_2=-\dfrac{3}{2}$

3) (E_m) n'a pas de solution si et seulement si $\Delta_m<0$.
   $\Delta_m=(2m+5)^2-4(m-1)(m+4)=4m^2+20m+25-4m^2-16m+4m+16=8m+41.$
   (E_m) n'a pas de solution si et seulement si $8m+41<0 \quad\Leftrightarrow\quad m<-\dfrac{41}{8}$

Exercice 5

Nombre d'or **(2 points)**

$$\frac{\text{AB}}{\text{AD}}=\frac{\text{EF}}{\text{EB}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x}{1}=\frac{1}{x-1} \quad\Leftrightarrow\quad x^2-x=1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-x-1=0.$$

$\Delta=1+4=5$, en ne retenant que la racine positive, on a $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Le nombre d'or est en effet $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1,618$

Exercice 6

Représentation de la fonction trinôme **(3 points)**

1) $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $x=-1$ et $x=5$ donc -1 et 5 sont les racines du trinôme qui peut donc se factoriser en $f(x)=a(x+1)(x-5)$.

2) Si on détermine la valeur en zéro de la forme factorisée, on trouve $f(0)=-5a$.
   Comme $\mathscr{C}_f$ passe par le point A(0,5), on en déduit que $-5a=5 \quad\Leftrightarrow\quad a=-1$.
   On développe cette forme factorisée : $f(x)=-(x+1)(x-5)=-x+4x+5$
   On en déduit alors les coefficients : $a=-1$, $b=4$ et $c=5$.

3) Pour déterminer le sommet, il faut mettre $f(x)$ sous la forme canonique :
   $f(x)=-(x^2-4x-5)=-\left[(x-2)^2-4-5\right]=-\left[(x-2)^2-9\right]=-(x-2)^2+9.$
   Les coordonnées du sommet sont donc S(2 ;9).