Correction du devoir
Du lundi 8 janvier 2018

Exercice 1

Autour de la définition de la dérivée **(3 points)**

1) La définition analytique du nombre dérivé de f en 1 : $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

2) On donne $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$.

a) L'équation de la tangente (T) en 1 : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(x) = 10x - 6 \quad \Rightarrow f'(1) = 4$ et $f(1) = 1$

(T) : $y = 4(x-1) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 4x - 3$

b) Il faut résoudre : $f'(x) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 10x - 6 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{2}{5}$

Il existe une tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à la droite $y = -2x + 5$ pour $x = \dfrac{2}{5}$

Exercice 2

Calculs de dérivées **(7 points)**

1) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 15x^2 - 4x + 3$

2) $f(x) = \dfrac{-3x}{x^2+1}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 1 \geqslant 1$

$$f'(x) = \frac{-3(x^2+1) + 3x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2 - 3 + 6x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{3(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

3) $f(x) = 4x + 3 + \dfrac{9}{x-2}$ dérivable sur $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = 4 - \frac{9}{(x-2)^2} = \frac{4(x-2)^2 - 9}{(x-2)^2} = \frac{(2x-4-3)(2x-4+3)}{(x-2)^2} = \frac{(2x-7)(2x-1)}{(x-2)^2}$$

4) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ dérivable sur $]-3\,;+\infty[$ car on doit avoir $x + 3 > 0$

$$f'(x) = \sqrt{x+3} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2(x+3) + x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$$

5) $f(x) = (5x^2 + 2x + 3)^4$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(10x+2)(5x^2+2x+3)^3 = 8(5x+1)(5x^2+2x+3)^3$

6) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}$ dérivable si $\dfrac{x+1}{2-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(2-x) > 0.$

Le trinôme a deux racines -1 et 2, comme $a = -1$, on prend à l'intérieur des racines.

f est donc dérivable sur $]-2\,;\ 1[$.

$$f'(x) = \frac{1(2-x) - (-1)(x+1)}{(2-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}} = \frac{3}{2(2-x)^2}\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$$

EXERCICE 3

Étude d'une fonction polynôme **(5 points)**

1) $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 4x = 4x(2x^2 - 3x + 1)$.

2) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Racine de $2x^2 - 3x + 1$, $x_1 = 1$ racine évidente $P = \dfrac{1}{2}$ donc $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

Pour déterminer le signe de la dérivée, on remplit un tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$4x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x^2-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3) On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{-7}{8}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 - 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1 = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{1}{8} - 1 = \dfrac{-7}{8}$
- $f(1) = 2 - 4 + 2 - 1 = -1$

On pourrait montrer que la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

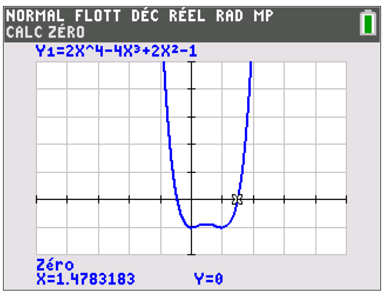
4) D'après le tableau de variation :

- sur $]-\infty\,;\,0]$ la fonction change de signe donc peut s'annuler.
- sur $]0\,;\,1[$ la fonction est toujours négative donc ne peut s'annuler.
- sur $[1\,;+\infty[$ la fonction change de signe donc peut s'annuler.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions.

Pour trouver les valeurs approchées des deux solutions avec sa calculatrice, on peut tracer la fonction f avec comme fenêtre $X \in [-5;5]$ et $Y \in [-2;5]$ puis avec la touche *calcul* et la fonction *zéro*, on trouve les valeurs :

$x_1 \approx -0,478$ et $x_2 \approx 1,478$



EXERCICE 4

Prendre toutes les initiatives **(5 points)**

1) x ne peut être plus grand que la moitié de la largeur $\quad I = [0\ ;\ 25]$

2) $v(x) = x(80 - 2x)(50 - 2x) = x(4\,000 - 160x - 100x + 4x^2) = 4x^3 - 260x^2 + 4\,000x$

3) $v'(x) = 12x^2 - 520x + 4\,000 = 4(3x^2 - 130x + 1\,000)$.

$v'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 130x + 1\,000 = 0$. On a $\quad \Delta = 16\,900 - 12\,000 = 4\,900 = (70)^2$

$\Delta > 0$ deux racines $\quad x_1 = \dfrac{130 + 70}{6} = \dfrac{100}{3} \notin I \quad$ et $\quad x_2 = \dfrac{130 - 70}{6} = 10 \in I$

On obtient la tableau de variation suivant :

x	0		10		25
$v'(x)$		$+$	0	$-$	
$v(x)$			$v(10)$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$v(10) = 4 \times 10^3 - 260 \times 10^2 + 4000 \times 10 = 4\,000 - 26\,000 + 40\,000 = 18\,000$

Le volume maximum est de $\quad 18\,000\ \text{cm}^3\quad$ soit $18\ \ell$