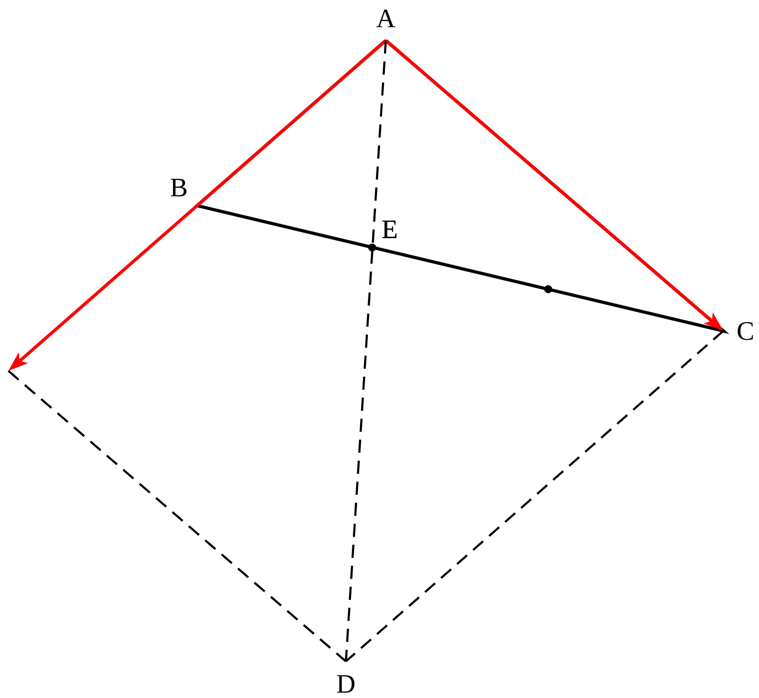
Correction contrôle de mathématiques
Du mardi 12 avril 2016

EXERCICE 1

Alignement **(3 points)**

1) On obtient la figure suivante :



2) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA + AC}\right)$

$= \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

3) On a alors : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et donc les points A, E et D sont alignés.

EXERCICE 2

Repère quelconque **(4 points)**

1) On a $I\left(\dfrac{2}{3}\,;\,0\right)$, $C(1\,;\,1)$, $D(0\,;\,1)$ et $K\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

2) Soit $N(x\,;\,y)$ un point quelconque de la droite (DI). Les vecteurs $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont alors colinéaires.

$$\det(\overrightarrow{DN}, \overrightarrow{DI}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & \dfrac{2}{3} \\ y-1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x - \dfrac{2}{3}(y-1) = 0 \overset{\times 3}{\Leftrightarrow}$$

$$-3x - 2y + 2 = 0 \overset{-1}{\Leftrightarrow} 3x + 2y - 2 = 0$$

3) Soit N(x ; y) un point quelconque de la droite (BJ). Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont alors colinéaires.

$$\det(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BJ}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1) + y = 0 \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} x - 1 + 2y = 0$$

$\Leftrightarrow$ une équation cartésienne de la droite (BJ) est : $x + 2y - 1 = 0$

Le point M est donc déterminé par : $\begin{cases} 3x + 2y = 2 & (1) \\ x + 2y = 1 & (2) \end{cases}$

En soustrayant termes à termes les équations (1) et (2) : $2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

En remplaçant dans l'équation (2) : $\frac{1}{2} + 2y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

Les coordonnées de M sont $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{4}\right)$

4) $\overrightarrow{MK} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MC} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MC}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont colinéaire donc les points M, K et C sont alignés.

Exercice 3

Vrai-faux **(4 points)**

1) **Affirmation 1 : Faux**

Un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d d'équation : $-4x + 3y + 1 = 0$ est $\vec{v}(-b ; a) = (-3 ; -4)$.

$\det(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = (-3)(-4) - 4(-3) = 12 + 12 = 24 \neq 0.$

Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas colinéaire à $\vec{v}$, donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de la droite d.

2) **Affirmation 2 : vrai**

La droite d d'équation $-4x + 2y + 8 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-2 ; -4)$.

La droite d' d'équation réduite $y = 2x + 5$ a pour vecteur directeur $\vec{v}(1 ; m) = (1 ; 2)$

$\det(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -2(2) - 1(-4) = -4 + 4 = 0.$

Le vecteur $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$, donc les droites d et d' sont parallèles.

3) **Affirmation 3 : vrai**

Soit M(x ; y) un point quelconque de la droite d passant par A(1 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{v}(-1\,;\,2)$. On a alors :

$$\det(\overrightarrow{AM}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y-2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2(x-1)+(y-2)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$2x-2-y-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+y-4=0$$

4) **Affirmation 4 : Faux**

Pour que les droites (AM) et (ER) soient sécantes pour tout réel x, le déterminant de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{ER}$ doit être non nul pour tout réel x.

$$\det(\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{ER}) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2-1 = (x-2-1)(x-2+1) = (x-3)(x-1)$$

$$\det(\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{ER}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x=3 \text{ ou } x=1$$

Les droites (AM) et (ER) sont parallèles pour $x=3$ et $x=1$, elles ne sont donc pas sécantes pour tout réel x.

EXERCICE 4

Relations entre angles orientés **(2 points)**

- $(2\vec{u}\,;\,\vec{v}) = (\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$
- $(3\vec{v}\,;\,\vec{u}) = (\vec{v}\,;\,\vec{u}) = -(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$
- $(-\vec{v}\,;\,2\vec{u}) = (-\vec{v}\,;\,2\vec{u}) = -(\vec{u}\,;-\vec{v}) = -\left[(\vec{u}\,;\,\vec{v})+\pi\right] = -\left(\dfrac{3\pi}{4}+\pi\right) = -\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

EXERCICE 5

Mesure principale **(3 points)**

1) θ_1 et θ_2 sont deux mesures d'un même angle, s'il existe un entier k tel que : $\theta_2 = \theta_1 + k\,2\pi$.

$$\frac{117\pi}{8} = \frac{5\pi+112\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}+\frac{112\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}+14\pi = \frac{5\pi}{8}+7(2\pi)$$

$\dfrac{117\pi}{8}$ et $\dfrac{5\pi}{8}$ sont donc deux mesures d'un même angle.

2) $-\dfrac{7\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\dfrac{53\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

3) $\sin\dfrac{13\pi}{6} = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ et $\cos\dfrac{11\pi}{3} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

Exercice 6

Trigonométrie **(4 points)**

1) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \dfrac{25}{169} = \dfrac{144}{169}$.

or $\quad x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ donc $\sin x \geqslant 0$, on en déduit $\sin x = +\dfrac{12}{13}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{12}{5}$

2) $\begin{cases} \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$

3) a) $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$x = -\dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi$ **ou** $x = \pi + \dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi = \dfrac{5\pi}{4} + k\,2\pi = -\dfrac{3\pi}{4} + k\,2\pi$

b) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}$

- $x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + k\,2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k\,2\pi$ **ou**
- $x + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + k\,2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{2\pi}{3} + k\,2\pi$