§ 10 Comportement d'une suite

Livre p 141-164

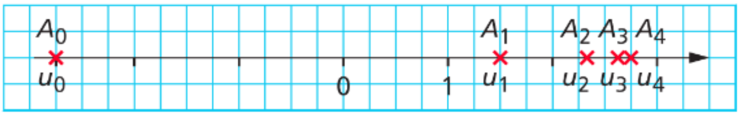
A - APPROCHE GRAPHIQUE

1 Représentation graphique d'une suite

Pour conjecturer le comportement d'une suite, il est utile de commencer par calculer les premiers termes et/ou les représenter sur un axe.

Exemple : On considère la suite définie pour tout entier n, par $u_n = 3 - \dfrac{6}{(n-1)^2}$

$u_0 = -3$; $u_1 = 1{,}5$; $u_2 = \frac{\ }{3} \approx 2{,}33$; $u_3 = 2{,}625$; $u_4 = 2{,}76$; $u_5 \approx 2{,}83$; $u_6 \approx 2{,}88$;
$u_7 \approx 2{,}91$; $u_8 \approx 2{,}93$.
On peut représenter, sur un axe, les points A_n d'abscisses u_n :

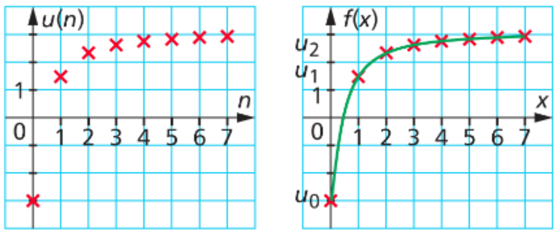


Définition 1

Dans le plan repéré, on appelle **représentation graphique d'une suite** (u_n), l'ensemble des points de coordonnées $(n ; u_n)$.

Remarque : Les termes de la suite sont ici les ordonnées des points.

Exemple : Comme $u_n = f(n)$ où f est la fonction $x \mapsto 3 - \dfrac{6}{(x+1)^2}$, les points de la représentation graphique de la suite sont les points de coordonnées entières positives de la courbe représentative de la fonction f, ce qui permet d'évaluer les termes de la suite sans faire de calcul.



Remarque : Si la suite est définie par récurrence (u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$), alors on peut représenter la suite à l'aide de la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y = x$.

2 Conjectures à partir du graphique

a. Observation du sens de variation de la suite

Exemple : Il semble que, plus n augmente, plus u_n augmente. Si tel est le cas, c'est-à-dire si $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots$, alors on dit que la suite (u_n) est **croissante**.

Remarques :
- On dit qu'une suite (u_n) est **décroissante** lorsque tous les termes diminuent, c'est-à-dire $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_1 \geqslant \ldots$
- On dit qu'une suite (u_n) est **constante** lorsque tous les termes u_n sont égaux : $u_0 = u_1 = u_2 = \ldots$
- Une suite peut être **ni croissante, ni décroissante** (exemple : $u_n = \sin(n)$).

b. Observation de u_n lorsque n tend vers $+\infty$

Exemple : On voit graphiquement que les termes se rapprochent de plus en plus de 3 lorsque n tend vers $+\infty$. Si tel est le cas, on dit que la **limite de la suite (u_n)** est égale à 3 et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Remarques :
- Si u_n devient aussi grand que l'on veut lorsque n tend vers $+\infty$, alors on écrira : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ si les valeurs sont négatives).
- Une suite peut ne peut avoir de limite (exemple, $u_n = (-1)^n$).

B - ETUDE DU COMPORTEMENT D'UNE SUITE

1 Sens de variation d'une suite

Définition 2

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
- On dit que (u_n) est **croissante** lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- On dit que (u_n) est **décroissante** lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- On dit que (u_n) est **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
- On dit que (u_n) est **constante** lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n+1}$.

Vocabulaire :
« Étudier la monotonie de (u_n) » signifie déterminer le sens de variation de (u_n).

REMARQUES : • Pour montrer qu'une suite n'est pas monotone, il suffit de vérifier que trois termes consécutifs de la suite ne sont pas rangés dans le même ordre.
• Pour montrer qu'une suite est monotone, il ne suffit pas de vérifier que les trois premiers termes sont rangés dans le même ordre mais on doit utiliser la définition 2.

Propriété 1

Si, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geqslant 0}$, alors la suite (u_n) est **croissante**.
Si, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geqslant 0}$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.

DÉMONSTRATION : $u_n \leqslant u_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Et $u_n \geqslant u_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Propriété 2

Si, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n > 0}$, **et** $\boldsymbol{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1}$, alors la suite (u_n) est **croissante**.

Si, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n > 0}$, **et** $\boldsymbol{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1}$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.

DÉMONSTRATION : $u_n > 0$ **et** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$. Et $u_n > 0$ **et** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$.

Propriété 3

Soit f la fonction telle que, pour tour entier naturel n, $u_n = f(n)$.
- Si f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
- Si f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION : $n \leqslant n + 1$, donc si f est croissante sur $[0 ; +\infty[$ alors $f(n) \leqslant f(n + 1)$;
et si f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ alors $f(n) \geqslant f(n + 1)$.

EXEMPLE : La suite de terme général $u_n = n^2 + 4n$ est croissante car, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 + 4x$, et f est croissante sur $[0 ; +\infty[$ car sa dérivée est positive sur $[0 ; +\infty[$.

REMARQUES : • On peut rechercher le sens de variation de f à partir du signe de sa dérivée, mais on ne peut pas parler de la dérivée d'une suite.
• Une suite peut n'être croissante (respectivement décroissante) qu'à partir d'un certain rang p : pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ (respectivement $u_n \geqslant u_{n+1}$).
• Attention : si $u_{n+1} = f(u_n)$ alors le sens de variation de f ne donne pas nécessairement le sens de variation de (u_n).

EXEMPLE : La suite définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = u_n^{\,2} + 4u_n$ n'est pas monotone, alors que $u_{n+1} = f(u_n)$ et que f est monotone sur $[-2 ; +\infty[$.

2 Cas d'une suite arithmétique ou géométrique

Propriété 4

Astuce : *Le signe de r donne les variations de (u_n).*

Soit (u_n) une suite **arithmétique** de raison r.
- La suite (u_n) est strictement **croissante** si et seulement si $r > 0$.
- La suite (u_n) est strictement **décroissante** si et seulement si $r < 0$.
- La suite (u_n) est **constante** si et seulement si $r = 0$.

Note : *On peut aussi dire que (u_n) varie comme la fonction affine dont le sens de variation dépend du signe de r.*

Démonstration : Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = r$.
On étudie le signe de r et on utilise la définition 2 pour conclure.

Exemple : (u_n) telle que $u_n = -3n + 5$ est décroissante car c'est une suite arithmétique de raison -3 négative.

Remarque : Soit (u_n) une suite arithmétique de 1^er^ terme u_0 et de raison r.
- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

Propriété 5

Soit q un nombre réel non nul.
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est strictement **croissante**.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) est strictement **décroissante**.
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est **constante**.

Note : *Si $q < 0$, alors la suite (q^n) n'est pas monotone.*

Démonstration : Pour tout entier naturel n.
- Si $q > 0$, on écrit $\dfrac{q^{n+1}}{q^n} = q$ et on peut appliquer la propriété 2 p. 132.
- Si $q = 1$, $q_n = (1)^n = 1$ donc la suite (q^n) est une suite constante.

Remarque : • Pour déterminer le sens de variation d'une suite géométrique définie par $u_n = u_0\, q^n$, on devra aussi prendre en compte le signe de u_0.
• On peut aussi déterminer l'éventuelle limite d'une suite géométrique (u_n) de 1^er^ terme u_0 et de raison q.
- $q > 1$: si $u_0 > 0$, alors (u_n) a pour limite $+\infty$ et si $u_0 < 0$, alors (u_n) a pour limite $-\infty$.
- $-1 < q < 1$, alors (u_n) a pour limite 0.
- $q \leqslant -1$, alors (u_n) n'admet pas de limite.

Exemples : La suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'est pas monotone et n'a pas de limite.
La suite (2^n) est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

3 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 3

Soit une suite (u_n) et soit M et m deux réels fixés.
- On dit que (u_n) est **majorée** par M lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$; le réel M est appelé un **majorant** de la suite (u_n).
- On dit que (u_n) est **minorée** par m lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$; le réel m est appelé un **minorant** de la suite (u_n).
- On dit que (u_n) est **bornée** lorsqu'elle à la fois **majorée** et **minorée**.

Remarques : • Toute suite croissante est minorée par u_0.
• Toute suite décroissante est majorée par u_0.
• Toute suite bornée ne peut pas avoir pour limite $-\infty$ ou $+\infty$.

Exemples : Les suites définies par $u_n = (-1)^n$ et par $v_n = \sin(n)$ sont bornées, car sont toutes les deux minorées par -1 et majorées par 1.